现代数学基础丛书 99

数理逻辑引论与归结原理

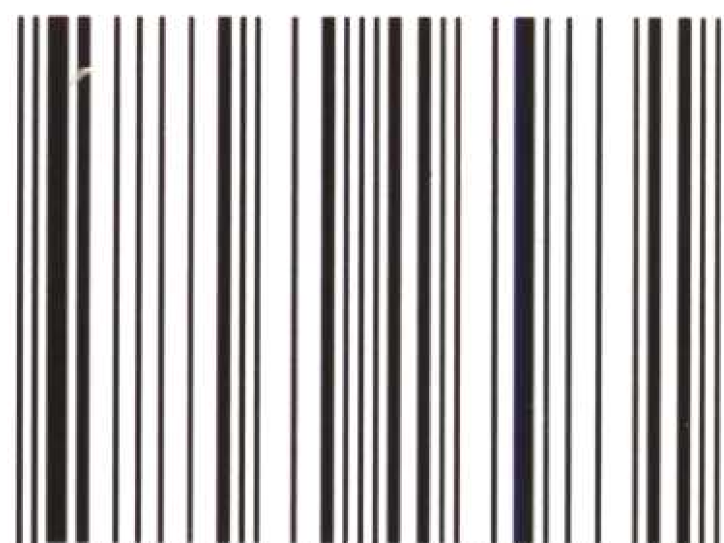
（第二版）

王国俊 著



科学出版社
www.sciencep.com

(O-2380.0101)



销售分类建议：高等数学

ISBN 7-03-016583-7
定 价：38.00 元

内 容 简 介

本书在第一版的基础上进行修订再版，全书共 9 章，内容可分为 Boole 代数理论，命题演算与谓词演算理论，归结原理理论，多值逻辑的最新理论等 4 部分．同时，在第一版的基础上对“计量逻辑学”，关于一阶系统 $K_{\mathscr{L}}$ 完备性的证明等诸多内容做了补充或改写．

本书可供计算机专业、应用数学专业、人工智能专业的研究生与高年级本科生及教师阅读．

图书在版编目(CIP)数据

数理逻辑引论与归结原理/王国俊著．—2 版．—北京：科学出版社，2006
（现代数学基础丛书 99）
ISBN 7-03-016583-7

Ⅰ．数…　Ⅱ．王…　Ⅲ．数理逻辑　Ⅳ．O141

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 145036 号

责任编辑：张　扬　潘继敏 / 责任校对：宋玲玲
责任印制：安春生 / 封面设计：王　浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2003 年 8 月第　一　版　　开本：B5(720×1000)
2006 年 3 月第　二　版　　印张：17
2006 年 3 月第一次印刷　　字数：316 000
印数：1—3 000

定价：38.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈路通〉）

《现代数学基础丛书》编委会

主　编：杨　乐

副主编：姜伯驹　李大潜　马志明

编　委：（以姓氏笔画为序）

王启华　王诗宬　冯克勤　朱熹平

严加安　张伟平　张继平　陈木法

陈志明　陈叔平　洪家兴　袁亚湘

葛力明　程崇庆

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用. 许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益.

20 世纪 70 年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经破坏与中断了十余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着. 1978 年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会. 当时他们的参考书籍大多还是 50 年代甚至更早期的著述. 据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著丛书》与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约 40 卷，后者则逾 80 卷. 它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用.

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍. 既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新.

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科. 我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域.

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动. 它获得了广大读者的喜爱. 我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高作出贡献.

杨　乐

2003 年 8 月

第二版前言

本书的再版与初版相比有较大的变化.第一,我们补充了“计量逻辑学”这一新的内容作为第9章.在初版前言中我们曾说“多值逻辑演算与二值逻辑演算有诸多相似之处,特别是多值逻辑演算理论在不确定性推理方面有较广泛的应用.”正因如此,我们在初版中安排了介绍多值逻辑演算理论的第8章.众所周知,数理逻辑的特点在于形式化和符号化,无论是二值逻辑还是多值逻辑,都注重形式推理而不大关心数值计算.这一特点使得数理逻辑中的许多概念都是两极化的.比如,设 Γ 是一个逻辑理论,如果从 Γ 出发可以推出可驳公式(即,定理的否定式,对完备系统而言,可驳公式就是矛盾式),则称 Γ 是不相容的,否则就称 Γ 是相容的.但两个相容理论 Γ 与 Σ 是可以大不相同的.比如,设 Γ 中的公式都是定理,而取 Σ 为全体原子公式之集 S,则可证明 Γ 与 Σ 都是相容的,但从 Γ 出发只能推出定理,而从 Σ 出发则可推出与定理“相去甚远”(见第9章)的公式来.可见引入适当的指标去区分不同的相容理论的相容程度就是必要的了.类似地,许多其他的逻辑概念也都可以程度化.这样一来,形式推理与数值计算就自然地联系了起来.近几年我们在这方面作了一些探索,得到了若干似乎是合理的结果.本书的第9章就是这方面研究的一个小结.我们之所以不揣冒昧地把这些结果公布出来,是想及早引起同行学者们的关注,并向大家请教,希望这一理论能向正确的方向发展,并能在相关的学科中得到应用.第9章的内容在我们的研究生讨论班中系统地报告并讨论过.尽管如此,其中的不妥乃至谬误之处仍然难免,希望大家不吝赐正.

第二,鉴于初版中的若干疏漏,我们完全改写了4.4节,即,重写了关于一阶系统 $K_{\mathscr{L}}$ 完备性的证明,用将 $\mathscr{L}$ 进行扩充的方法去证明 $K_{\mathscr{L}}$ 的完备性,然后给出了 $K_{\mathscr{L}}$ 的完备性的一个新的代数证明.另外,在命题演算部分,我们又补充了系统 L 的完备性的一个简单的代数证明.

第三,我们对初版中许多不妥或不清楚的表述作了修改或润色,特别是对涉及到变元的自由性的几个不正确的表述都已作了改正.

本书的修订与增补工作是2005年6～9月我在美国访问期间完成的.新泽西州的 Stevens 技术学院(Stevens Institute of Technology)的蒋伟博士为我借阅了足够的参考书籍,这对我顺利完成这本再版书有直接的帮助.我对他表示衷心的感谢.

我的研究生周红军、李骏、韩邦合、罗清君和张东晓对再版的书稿做了认真的校对，李骏、韩邦合与张东晓还对原稿里证明有误的几个命题给出了正确的证明. 我对他们表示感谢. 特别应当感谢的是博士研究生周红军同学，他对全书的校对和改正做了大量认真细致的工作，原稿中的许多不妥之处都是由他发现和改正的.

我衷心感谢陕西师范大学研究生处对出版此书的资助.

最后，感谢打印社黄新玲女士的高效而细致的工作.

王国俊

2005 年 10 月于陕西师范大学数学研究所

第一版前言

数学是什么？数学是根据某些假设，用逻辑的推理得到结论.因为是用这么简单的方法，所以数学是一门坚固的科学，它所得到的结论是很有效的.

陈省身

逻辑是属于语言的，它提供一套法则，用以导出更多的词语连接，这也是为了交流真理的.

Morrise Kline

随着科学技术的进步，现代数学有了很大的发展.或者可以在一定程度上反过来说：现代数学的发展为科学技术的进步奠定了基础.无论怎么说，发展至今的现代数学不仅自身已经是一棵枝繁叶茂的参天大树，而且它深深地扎根于现代科学技术的各个领域，从那里汲取营养，同时也从那里赋予科学技术以活力.按照美国数学会2000年对数学的MR分类，除有少数空缺外，其编号已经从00,01,……一直编到了90以上，而且每类又可细分为多达数十种的研究方向.由此可见现代数学的内容浩如烟海，Euler时代那种对数学各分支无一不精通的数学家今天已不复存在.

如上所述，现代数学分支繁多，不同分支的研究内容与方法又往往相去甚远，所以要求数学工作者通晓数学的各分支是不现实的.然而我们认为，无论从事哪种数学分支的研究，在一定程度上了解和掌握数理逻辑的内容与方法都是必要的，因为正如Morrise Kline所说的："逻辑是属于语言的，它提供一套法则，用以导出更多的词语连接，这也是为了交流真理的."（见参考文献[21]）这里我们说"在一定程度上了解"，主要指了解数理逻辑引论，即逻辑演算理论，包括命题演算理论和一阶谓词演算理论，因为它不仅是数理逻辑中的公理集合论、模型论、证明论和递归论的共同基础，而且是广大非数理逻辑专家们最为关心的部分.特别是对于从事计算机专业、应用数学专业和人工智能专业等教学与研究的老师们以及在这些专业学习的大学生和研究生们，熟悉与掌握逻辑演算理论就是必需的了.

逻辑演算理论是一种有效的工具.如果熟练地掌握了逻辑演算的方法与技巧，那就为进一步了解和掌握诸如归结原理、逻辑程序设计和定理自动证明等奠定了

基础.这其中对归结原理的方法与技巧的掌握又可直接在学习和研究有重要应用价值的逻辑程序设计与自动推理理论时发挥作用.如果有一部能通俗地论述逻辑演算理论并在此基础上清楚而严谨地展开归结原理理论的著作,那对于计算机专业、应用数学专业以及人工智能专业等领域的广大师生和研究人员来说就是非常有使用价值的书籍了.本书正是向着这个方向努力的一个尝试.

参考文献[12]可以说是一部经典之作,它在详尽地讲述了归结原理的基础上介绍了基于 Herbrand 定理的若干证明程序,进而论述了问题求解和程序设计分析等定理自动证明方面的基本内容.文献[12]是一部好书,也已被国内外大多数同类著作或相关著作所引用.只是文献[12]侧重于归结原理,对逻辑演算理论的介绍只限于该书的后面要直接用到的部分,对于像前束范式与原公式的可证等价性以及命题演算与谓词演算的完备性等重要内容均未提及,这对于希望通过该书学习逻辑演算的读者来说,内容是远远不够的.文献[15]对文献[12]作了补充与发挥,但逻辑演算的内容仍然很少.本书后面的参考文献中凡属数理逻辑内容的都是名家之作,其中对逻辑演算的论述自然是高水准的和正统的.比如,对命题逻辑完备性的证明采用相容扩张的方法,对一阶谓词逻辑完备性的证明则采用增添可数无穷多个个体常元[1]或增添可数无穷多个变元符号[22]来进行扩张的传统方法.这些方法当然是严谨的、无懈可击的.然而对于非数理逻辑专业的读者来说,这些方法似乎过于专业化而不够通俗,加之上述著述中一般均缺少归结原理方面的内容,所以看来我们在上面提出的出版一部能通俗地论述逻辑演算理论并能清楚而严谨地论述归结方法的著作是十分必要的事.

作者从近 10 年来讲授逻辑演算课程的经验中发现:(i)虽然形式化与符号化是数理逻辑的固有特点,然而能少用或能不用的符号就一定要少用或不用.(ii)尽可能地用通俗语言描述抽象的概念十分重要.比如,在命题演算的语义理论中,如果把赋值映射称为“裁判”,把真值集{0,1}称为“打分表”,把全体赋值之集称为“裁判团”,就会收到相当好的效果,而且还可为多值逻辑语义理论的讲述留下伏笔.(iii)Boole 代数理论是数学专业与计算机等专业的学生应当熟练掌握的基本知识,它与逻辑演算理论又有着深刻的联系,所以从 Boole 代数理论入手证明命题逻辑与一阶谓词逻辑的完备性定理既自然又易于理解.本书在讲述逻辑演算时充分注意了以上的三个方面.关于完备性的代数证明早在参考文献[10]中就已经给出,但那里使用的符号与当前使用的符号不同,而且其中关于一阶逻辑完备性的证明相当分散,读者需要翻阅长达数十页的内容才可最终得出完备性定理来.本书则较为精练地用商代数的方法给出了一阶逻辑完备性的证明.

“归结原理”译自“Resolution Principle”，文献[15]中在 2.5 节中专门解释了为何这样翻译. 在文献[3]中则将“Resolution Principle”译为“消解原理”. 本书采用前一种译法. 归结原理是由 J. A. Robinson 于 1965 年提出的，是定理自动证明的重要工具之一[23]. 虽然它有计算量大的缺点，但其形式化的方法仍不断地被成功地应用(参看文献[24],[25]). 特别是熟悉了归结原理中的这一套形式化的方法后可以驾轻就熟地学习与研究在计算机科学中有着重要应用的逻辑程序设计理论[20]等. 本书在用通俗化的方法系统地给出了逻辑演算理论的基础上，尽可能清楚与严谨地讲述了归结原理的基本内容. 比如，合一(unification)是归结原理与逻辑程序设计理论中的重要概念，然而与之相关的关于置换的复合运算满足结合律的完整证明却未见到. 本书给出了它的严谨而完整的证明. 关于 Herbrand 第 1 定理的证明，文献[12]引用了无法查找出处的 König 引理(只标出“Knuth,1968”，但参考文献中未出现)，其他著作则似乎忽略了 König 引理. 本书在给出了另外一个引理，即引理 5.5.2 的基础上给出了 Herbrand 第 1 定理的严谨的证明. 又如文献[12]在证明 PI 归结方法与锁归结方法的完备性时都是先就基子句的情形作了比较严谨的证明，而向一般情形转化时则使用了“不难证明”或“类似于某某定理的证明”等不很明确的表述. 本书则通过引入“保归结扩张”概念和建立相应的引理给出了上述各定理的严谨的证明. 再如，要计算一个公式的子句集需要先计算该公式的 Skolem 标准形，而计算 $A\wedge B$ 的 Skolem 标准形比分别计算 A 与 B 的 Skolem 标准形要复杂许多. 文献[12]中在计算若干较复杂的形如 $A\wedge B$ 的公式的子句集时不加声明地改为分别求 A 与 B 的子句集然后将其合并的方法. 本书则在 6.5 节中就此进行了专门的论述. 另外，本书注意了用尽可能清楚的方式展开所讲的理论. 对于一些较难理解的概念与定理，本书通过给出贴切的例子加以说明. 比如，关于归结式的提升引理证明很长，不易理解，本书就设计出可以完全与引理的证明相对照的例子(例 6.4.2)，然后再给出提升引理的证明. 本书还经常通过“注”的方式阶段性地向读者提醒或小结前一段内容中值得注意的问题，并安排了比较充分的练习题，希望这些能有助于读者对本书内容的理解.

鉴于多值逻辑演算与二值逻辑演算有诸多相似之处，特别是多值逻辑演算理论在不确定性推理方面有较广泛的应用. 本书还安排了最后一章，以 Łukasiewicz 逻辑系统与作者引入的 $\mathscr{L}^*$ 系统为例讲述了多值逻辑演算理论，可供读者选用.

本书共分 8 章，第 1 章讲预备知识，主要是讲 Boole 代数理论. 第 2 章讲命题演算. 第 3 章与第 4 章分别讲一阶谓词演算的语义理论与语构理论，但不涉及带等词的逻辑理论. 本书于第 5 章较系统地讲述了 Skolem 变形和 Herbrand 定理，其中在

5.4 节中介绍作者引入的所谓正则函数系统理论，可看作是对 Herbrand 域的一种推广，可供读者参考．第 6、7 章分别讲述归结原理及其简化方法．最后在第 8 章中介绍多值逻辑演算理论．只关心逻辑演算理论的读者可以选择本书的前四章，甚至还可以略过第 1 章，只需在证明命题演算系统 L 与谓词演算系统 $\mathscr{L}$ 的完备性定理时直接引用命题 1.3.7 即可．

本书曾作为讲义多次向研究生与访问学者讲授过，他们纠正了讲义中的若干笔误并提出过许多好的修改建议．裴道武曾就 $\mathscr{L}^*$ 系统的完备性问题与作者进行过详细的讨论，裴道武与吴洪博分别提出了 $\mathscr{L}^*$ 系统的简化形式，这对本书第 8 章的形成有直接的帮助．张花荣与周湘南仔细地编写了本书的索引．韩诚对本书的归结原理部分多次提出了修改意见．研究生宋玉靖、覃锋、任芳、傅丽、王三民、王向云、李骏、袁和军、王龙春、宋庆燕、兰蓉、常瑶芝、许文艳、苏忍锁、任燕、马小珏、吴静杰、焦烨、罗艳斌，上海师大研究生吴恒洋以及访问学者斯钦孟克、张建华、刘淼、王开民、赵正波、张家禄和袁庆生等在听课过程中都提出过修改建议，这在很大程度上减少了本书原稿中的错误，然而由于作者水平所限，本书中的疏漏、不妥乃至谬误之处都仍在可能之列，希望各位专家与读者指正．

清华大学应明生教授阅读了本书的部分书稿，并积极推荐本书出版，四川大学刘应明院士和西安交通大学张文修教授、徐宗本教授也一直关注与支持本书的出版，加之有陕西师范大学出版基金的资助和打印社黄新玲女士的高效而细致的工作，所以本书才能较顺利地与读者见面．作者在此一并表示最诚挚的感谢！

王国俊

2002 年 10 月于陕西师范大学数学研究所

目　　录

第二版前言

第一版前言

第 1 章　预备知识 …………………………………………………………… (1)

1.1　偏序集 ………………………………………………………………… (1)

1.2　格 ……………………………………………………………………… (4)

1.3　Boole 代数 ……………………………………………………………… (9)

第 2 章　命题演算 …………………………………………………………… (16)

2.1　命题及其符号化 ……………………………………………………… (16)

2.2　命题演算的语义理论 ………………………………………………… (17)

2.3　命题演算的语构理论 ………………………………………………… (27)

第 3 章　一阶谓词演算的语义理论 ………………………………………… (41)

3.1　一阶语言 ……………………………………………………………… (42)

3.2　解释、逻辑有效公式 ………………………………………………… (46)

3.3　逻辑等价 ……………………………………………………………… (57)

第 4 章　一阶谓词演算的语构理论 ………………………………………… (60)

4.1　形式系统 $\boldsymbol{K}_{\mathscr{L}}$ ……………………………………………………… (60)

4.2　可证等价关系 ………………………………………………………… (66)

4.3　前束范式 ……………………………………………………………… (70)

4.4　一阶系统 $\boldsymbol{K}_{\mathscr{L}}$ 的完备性 ……………………………………………… (75)

4.5　不含量词的公式* …………………………………………………… (82)

第 5 章　Skolem 标准形与 Herbrand 定理 ………………………………… (88)

5.1　引言 …………………………………………………………………… (88)

5.2　Skolem 标准形 ………………………………………………………… (90)

5.3　子句 …………………………………………………………………… (94)

5.4　正则函数系统与正则域* …………………………………………… (96)

5.5　Herbrand 域与 Herbrand 定理 ……………………………………… (99)

5.6　Davis 与 Putnam 方法 ……………………………………………… (108)

第 6 章　归结原理 …………………………………………………………… (112)

6.1 命题演算中的归结方法 …… (112)
6.2 置换与合一 …… (115)
6.3 谓词演算中的归结原理 …… (120)
6.4 归结原理的完备性定理 …… (125)
6.5 求子句集 S 的简化方法 …… (129)
第 7 章 归结方法的简化 …… (135)
7.1 引言 …… (135)
7.2 语义归结 …… (138)
7.3 锁归结 …… (143)
7.4 线性归结 …… (148)
第 8 章 多值逻辑演算理论 …… (157)
8.1 引言 …… (157)
8.2 正则蕴涵算子 …… (158)
8.3 MV 代数 …… (164)
8.4 Łukasiewicz 命题演算系统 …… (171)
8.5 R_0 代数 …… (180)
8.6 命题演算系统 $\mathscr{L}^*$ …… (190)
第 9 章 计量逻辑学 …… (204)
9.1 二值命题逻辑系统 **L** 中的计量逻辑理论 …… (204)
9.2 多值 Łukasiewicz 命题逻辑系统 $\mathbf{Ł}_n$ 与 **Łuk** 中的计量逻辑理论 …… (219)
9.3 多值 R_0-命题逻辑系统 $\mathscr{L}_n^*$ 与 $\mathscr{L}^*$ 中的计量逻辑理论 …… (237)
9.4 关于 Gödel 系统与乘积系统的评注 …… (248)
参考文献 …… (250)
索引 …… (251)
《现代数学基础丛书》出版书目 …… (256)

第1章 预备知识

按照 Bourbaki 学派的观点，数学中有三大母结构，即代数结构、拓扑结构与序结构，这三大母结构相互交融形成了数学的多个分支. 本章主要介绍最基本的序结构理论，后半部分也涉及一些代数结构理论，这些知识对理解后面要讲的逻辑演算理论是有帮助的.

1.1 偏序集

1.1.1 预序集

定义 1.1.1 设 X 是非空集，$R \subset X^n$，则称 R 为 X 上的 **n 元关系**. 当 $(x_1, \cdots, x_n) \in R$ 时称 $(x_1, \cdots, x_n)$ 满足关系 R，记作 $R(x_1, \cdots, x_n) = 1$；否则称 $(x_1, \cdots, x_n)$ 不满足关系 R，记作 $R(x_1, \cdots, x_n) = 0$. 当 $n = 2$ 时，$R(x, y) = 1$ 也记作 xRy. 当 $n = 1$ 时，X 上的一元关系就是 X 的子集.

例 1.1.1 在 $[0,1]$ 上规定 xRy 当且仅当 $y = x^2$，则 R 是 $[0,1]$ 上的二元关系. 一般地，设 $f: [0,1] \to [0,1]$ 是一元函数，则此函数的图像 $R = \{(x, f(x)) \mid x \in [0,1]\}$ 是 $[0,1]$ 上的二元关系. 更一般地，设 $f: X^n \to X$ 是 X 上的 n 元函数，则其图像 $R = \{(x_1, \cdots, x_n, f(x_1, \cdots, x_n)) \mid (x_1, \cdots, x_n) \in X^n\}$ 是 X 上的 $n+1$ 元关系. 但是反过来，X 上的 $n+1$ 元关系自然不必是 X 上 n 元函数的图像. 比如，在 $[0,1]$ 上规定 xRy 当且仅当 $x \leqslant y$，则 R 是 $[0,1]$ 上的二元关系，它不是 $[0,1]$ 上任何函数的图像.

定义 1.1.2 设 X 是非空集，$\prec$ 是 X 上的二元关系. 如果：

(i) $x \prec x \quad (x \in X)$；

(ii) 若 $x \prec y$ 且 $y \prec z$，则 $x \prec z \quad (x, y, z \in X)$，

则称 $\prec$ 为 X 上的**预序**，称 $(X, \prec)$ 为**预序集**. 条件(i) 和(ii) 分别称为 $\prec$ 的反身性和传递性.

例 1.1.2 (i) 设 X 是欧氏平面 $\mathbf{R}^2$ 上的全体三角形之集. 以 $m(x)$ 记三角形 x 的面积，规定 $x \prec y$ 当且仅当 $m(x) \leqslant m(y)$，即 x 的面积不超过 y 的面积，则 $\prec$ 是 X 上的预序，$(X, \prec)$ 是预序集.

(ii) 设 $\mathscr{P}_f(\mathbf{N})$ 是自然数集的一切有限子集之集，设 $A \in \mathscr{P}_f(\mathbf{N})$，以 $|A|$ 记 A 中元的个数，规定 $A \prec B$ 当且仅当 $|A| \leqslant |B|$ $(A, B \in \mathscr{P}_f(\mathbf{N}))$，则 $(\mathscr{P}_f(\mathbf{N}), \prec)$ 是预序集.

(iii) 设 $\mathbf{R}$ 是实数集. 以 $|x|$ 表示 x 的绝对值，规定 $x \prec y$ 当且仅当 $|x| \leqslant |y|$ $(x, y \in \mathbf{R})$，则 $(\mathbf{R}, \prec)$ 是预序集.

1.1.2　偏序集

定义 1.1.3　设$(P, \prec)$是预序集，若$\prec$除满足反身性和传递性外还满足反对称性，即

$$当\ x \prec y\ 且\ y \prec x\ 时\ x = y,$$

则称$\prec$为P上的偏序，称$(P, \prec)$为**偏序集**. $x \prec y$读作"x小于或等于y"或"y大于或等于x"或"x不大于y"或"y不小于x". 若对P中任二元x与y必有$x \prec y$或$y \prec x$之一成立，则称$(P, \prec)$为**全序集**.

例 1.1.3　(i) 例 1.1.2 中的三个预序集都不是偏序集.

(ii) 设P是欧氏平面$\mathbf{R}^2$上的全体三角形之集，对任意两个三角形x与y，规定$x \prec y$当且仅当x包含于y之中，则$(P, \prec)$是偏序集. 一般地，设$\mathscr{P}(X)$是X的幂集，对X的任二子集A与B，规定$A \prec B$当且仅当$A \subset B$，则$(\mathscr{P}(X), \subset)$是偏序集，这里$A \subset B$表示当$x \in A$时有$x \in B$.

(iii) 以$C[0,1]$记$[0,1]$上的连续函数之集. 设$f, g \in C[0,1]$，规定$f \prec g$当且仅当对每个$x \in [0,1]$均有$f(x) \leqslant g(x)$，则$(C[0,1], \prec)$是偏序集.

(iv) 设$\prec$为$\mathbf{R}$上通常的序$\leqslant$，则$(\mathbf{R}, \prec)$是偏序集，而且是全序集. 又，设$\mathbf{C}$为全体复数之集. 规定$a + bi \prec c + di$当且仅当$a < c$或$a = c$且$b \leqslant d$，则$(\mathbf{C}, \prec)$是全序集. 但若规定$a + bi \prec c + di$当且仅当$a \leqslant c$且$b \leqslant d$，则$(\mathbf{C}, \prec)$仅构成偏序集，不构成全序集.

(v) 在图 1.1.1 中，P是黑点构成之集，规定位置较低的点不大于位置较高的点，也不大于自身，则各图中的P都是偏序集.

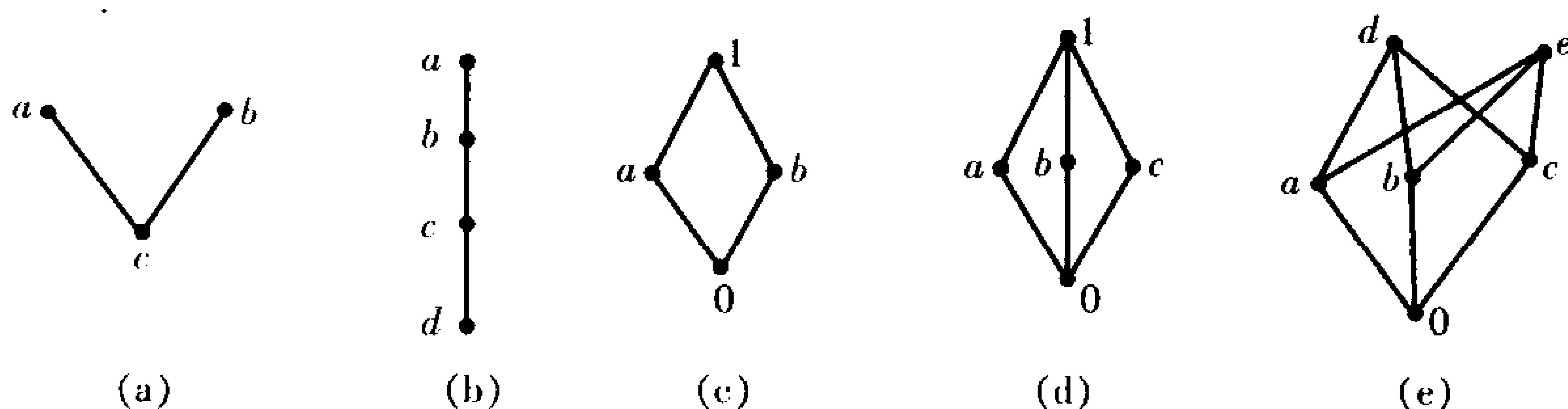


图 1.1.1

以下常将P上的偏序$\prec$记为$\leqslant$.

1.1.3　界与确界

定义 1.1.4　设$(P, \leqslant)$为偏序集，$X \subset P$，$a \in P$. 如果当$x \in X$时有$x \leqslant a$($x \geqslant a$)，则称a为X的**上(下)界**. 设a是X的上(下)界，若对X的任一上(下)界b均有$a \leqslant b$($a \geqslant b$)，则称a为X的**上(下)确界**. a是X的上(下)确界记作$a = \sup X$($a = \inf X$)或$a = \bigvee X$($a = \bigwedge X$).

例 1.1.4　(i) 在图 1.1.1(a) 中，$\{a, b\}$有下确界c，但没有上界. 在图 1.1.1(b)

中$\{a,b,c\}$的上、下确界分别是a和c. 在图1.1.1(e)中,$X=\{a,b,c\}$有下确界0,X有两个上界d与e,但没有上确界.

(ii) 在偏序集$(\mathscr{P}(X),\subset)$中,设$\{A_i \mid i\in I\}\subset \mathscr{P}(X)$,则$\{A_i \mid i\in I\}$的上、下确界都存在,就是$\{A_i \mid i\in I\}$中各集的并与交,即$\sup\{A_i \mid i\in I\}=\bigcup_{i\in I}A_i$,$\inf\{A_i \mid i\in I\}=\bigcap_{i\in I}A_i$.

(iii) 在$C[0,1]$中,设$X=\{h \mid h(x)=x^n, n=1,2,\cdots\}$,则$\sup X=f$,这里$f(x)=x(x\in[0,1])$,$\inf X=g$,这里$g(x)=0(x\in[0,1])$. 如果放弃函数的连续性,则$\sup X=f$仍成立,但当$x\in[0,1)$时$(\inf X)(x)=0$,且$(\inf X)(1)=1$,又,设$Y=\{\overline{m} \mid m\in Z\}$,这里$\overline{m}$是在$[0,1]$上取常值$m$的函数($m$为整数),则$Y$既无上界,也无下界.

(iv) 设$P=[0,1]$,$\leqslant$是通常序,X为空集,则$\sup X=0$,$\inf X=1$,这是因为空集以P中的每个元为上(下)界,上确界作为最小上界当然是0了,而下确界作为最大下界当然是1(注意,条件"当$x\in\varnothing$时$x\leqslant a$(或$x\geqslant a$)"对P中每个a都成立).

1.1.4 定向集

定义1.1.5 预序集$(X,\prec)$的子集Y叫X的**定向子集**,若对Y中任二元a与b,存在Y中的元c使$a\prec c$与$b\prec c$都成立,特别当$Y=X$时称$(X,\prec)$为**定向集**.

例1.1.5 (i) 例1.1.2中的三个预序集,例1.1.3(ii),(iii),(iv)中的偏序集以及例1.1.4(ii),(iii),(iv)中的偏序集都是定向集.

(ii) 有最大元的偏序集是定向集,全序集也是定向集.

(iii) 考虑例1.1.3(ii)中的偏序集$(P,\leqslant)$,设X是一切包含于以原点为中心的单位圆内的全体三角形构成的P的子集,则X不是P的定向子集. 事实上,任取单位圆的一条直径作为底边,任取不在此直径上但在圆上的两个点为顶点作两个三角形,则单位圆中没有同时大于或等于这两个三角形的三角形.

(iv) 设X是无穷集,$\mathscr{P}_f(X)$是由X的一切有限子集构成的集族,则$(\mathscr{P}_f(X),\subset)$是定向集.

(v) 设X是非空集,$\mathscr{F}(X)$是X的一切模糊子集构成的集族,即$\mathscr{F}(X)=\{f \mid f:X\to[0,1]\text{是映射}\}$,$\mathscr{F}(X)$上的偏序$\leqslant$为点式序,即,$f\leqslant g$当且仅当对每个$x\in X$均有$f(x)\leqslant g(x)$,则$(\mathscr{F}(X),\leqslant)$为偏序集. 以$\mathscr{F}_<(X)$记在$X$中各点处的隶属度均小于1的模糊集$f$(即,对每个$x\in X$均有$f(x)<1$)之族,则$\mathscr{F}_<(X)$是$\mathscr{F}(X)$的定向子集,以$\mathscr{F}_0(X)$记仅在$X$中有限多个点处的隶属度不为0的模糊集之集,则$\mathscr{F}_0(X)$也是$\mathscr{F}(X)$的定向子集.

习 题 1.1

1. 试举两个不是偏序集的预序集的例子.
2. 设$(\mathscr{U},\subset)$是实直线$\mathbf{R}$中的全体开集按包含序所成的偏序集,

$$X = \left\{ \left(-2 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n} \right) \middle| n = 1,2,\cdots \right\},$$

求 $\sup X$ 和 $\inf X$. 一般地，设 $\mathscr{A}$ 是一族开集，问 $\sup\mathscr{A} = \bigcup\{A \mid A \in \mathscr{A}\}$ 与 $\inf\mathscr{A} = \bigcap\{A \mid A \in \mathscr{A}\}$ 是否成立？

3. 举一个没有最大元且不是全序集的定向偏序集的例子.

1.2　格

1.2.1　格

定义 1.2.1　设$(L, \leqslant)$是偏序集，如果对 L 中任意一对元 a 与 b，$\sup\{a,b\}$ 与 $\inf\{a,b\}$ 恒存在，则称$(L, \leqslant)$为**格**. $\sup\{a,b\}$ 与 $\inf\{a,b\}$ 常分别记为 $a \vee b$ 与 $a \wedge b$.

下面的命题是容易证明的.

命题 1.2.1　设$(L, \leqslant)$是格，则：

(i) 设 X 是 L 的非空有限子集，则 $\sup X$ 与 $\inf X$ 都存在.

(ii) $a \vee b = b \vee a$, $a \wedge b = b \wedge a$.

(iii) $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$, $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$.

(iv) $a \leqslant b$ 当且仅当 $a \vee b = b$ 当且仅当 $a \wedge b = a$.

这个命题的证明留给读者.

定义 1.2.2　设$(L, \leqslant)$是偏序集，如果对 L 的任意子集 X，$\sup X$ 与 $\inf X$ 都存在，则称$(L, \leqslant)$为**完备格**.

完备格有最大元，即 $\sup L$，记作 1_L，在不致混淆时也简记为 1. 完备格也有最小元，即 $\sup\varnothing$，记作 0_L，在不致混淆时也简记为 0.

例 1.2.1　(i) $(\mathbf{R}, \leqslant)$是格，但非完备格. $([0,1], \leqslant)$是完备格. 一般地，全序集一定是格，因为 a 与 b 的上、下确界分别是 a 与 b 中的较大者和较小者. 仅含两个元 0 与 1 的全序集 $\{0,1\}$ 是格.

(ii) $(\mathscr{P}(X), \subset)$是完备格. $(\mathscr{F}(X), \leqslant)$也是完备格.

(iii) 设$(L, \leqslant)$是格，且 L 有限，则$(L, \leqslant)$是完备格. 为此只需证明 L 的空子集有上、下确界. 事实上，有限格有最大元 1 和最小元 0，所以 $\sup\varnothing = 0$ 与 $\inf\varnothing = 1$ 都存在.

(iv) 图 1.1.1 中的(b)、(c)、(d)都是格，当然也都是完备格.

1.2.2　分配格

定义 1.2.3　设$(L, \leqslant)$是格，如果对 L 中的任意元 a, b, c 有

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c), \tag{1.2.1}$$

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c), \tag{1.2.2}$$

则称$(L, \leqslant)$为**分配格**.

在未给出分配格的例子之前,我们先证明几个常用的命题.

命题 1.2.2 设$(L, \leqslant)$是格,如果式(1.2.1)与式(1.2.2)之一成立,则另一个也成立,从而$(L, \leqslant)$是分配格.

证明 设式(1.2.1)成立,以下证明式(1.2.2)也成立.事实上,因为$a \leqslant a \vee b, a \wedge c \leqslant a$,所以由命题1.2.1(iv)得$(a \vee b) \wedge a = a, a \vee (a \wedge c) = a$.那么由式(1.2.1)得

$$\begin{aligned}(a \vee b) \wedge (a \vee c) &= ((a \vee b) \wedge a) \vee ((a \vee b) \wedge c)\\ &= a \vee ((a \vee b) \wedge c)\\ &= a \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c) = a \vee (b \wedge c).\end{aligned}$$

这就证明了式(1.2.2).类似可证若式(1.2.2)成立则式(1.2.1)也成立.

命题 1.2.3 设$\{(L_i, \prec_i) \mid i \in I\}$是一族预序集,$I \neq \emptyset$.令$L = \prod_{i \in X} L_i$为各$L_i$的乘积.在$L$上规定

$$(a_i)_{i \in I} \prec (b_i)_{i \in I} \quad \text{当且仅当对每个 } i \in I, a_i \prec_i b_i, \tag{1.2.3}$$

则:

(i) $(L, \prec)$是预序集.

(ii) 若每个$(L_i, \prec_i)$都是偏序集,则$(L, \prec)$也是偏序集.

(iii) 若每个$(L_i, \prec_i)$都是格(完备格),则$(L, \prec)$也是格(完备格).

(iv) 若每个$(L_i, \prec_i)$都是分配格,则$(L, \prec)$也是分配格.

$(L, \prec)$叫各$(L_i, \prec_i)$的**乘积**.由式(1.2.3)定义的L上的序$\prec$叫**点式序**.

证明 (i)和(ii)是显然的.设$(L_i, \prec_i)$是格$(i \in I)$,$(a_i)_{i \in I}$和$(b_i)_{i \in I}$是L中任二元,则由式(1.2.3)知

$$(a_i)_{i \in I} \vee (b_i)_{i \in I} = (a_i \vee b_i)_{i \in I}, \tag{1.2.4}$$

$$(a_i)_{i \in I} \wedge (b_i)_{i \in I} = (a_i \wedge b_i)_{i \in I}, \tag{1.2.5}$$

所以$(L, \prec)$是格.类似可证若$(L_i, \prec_i)$是完备格$(i \in I)$,则$(L, \prec)$也是完备格.所以(iii)成立.最后,若$(L_i, \prec_i)$是分配格$(i \in I)$,由式(1.2.4)与式(1.2.5)得

$$\begin{aligned}(a_i)_{i \in I} \wedge ((b_i)_{i \in I} \vee (c_i)_{i \in I}) &= (a_i \wedge (b_i \vee c_i))_{i \in I}\\ &= ((a_i \wedge b_i) \vee (a_i \wedge c_i))_{i \in I}\\ &= ((a_i)_{i \in I} \wedge (b_i)_{i \in I}) \vee ((a_i)_{i \in I} \wedge (c_i)_{i \in I}).\end{aligned}$$

所以$(L, \prec)$是分配格.

命题 1.2.4 全序集是分配格.

证明 设$(L, \leqslant)$是全序集,$a, b, c \in L$,不妨设$a \leqslant b \leqslant c$.则由$a \wedge (b \vee c) = a \wedge c = a$和$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a \vee a = a$知式(1.2.1)成立,所以$(L, \leqslant)$是分配格.

例 1.2.2 (i) $(\mathbf{R}, \leqslant)$与$([0,1], \leqslant)$是分配格.

(ii) $(\mathscr{F}(X),\leqslant)$ 是分配格. 事实上, $\mathscr{F}(X)=\prod_{i\in X}L_i$, 这里 $L_i=[0,1](i\in X)$, 且由例 1.1.5(v) 知 $\leqslant$ 恰为命题 1.2.3 中的点式序, 所以 $(\mathscr{F}(X),\leqslant)$ 是分配格.

(iii) $(\mathscr{P}(X),\subset)$ 是分配格, 即

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C). \tag{1.2.6}$$

事实上, 以第一式为例, $x\in A\cap(B\cup C)$ 当且仅当 $x\in A$ 且 $x\in B$ 或 $x\in C$, 即当且仅当 $x\in A$ 且 $x\in B$ 或 $x\in A$ 且 $x\in C$. 这表示 $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$. 所以 $(\mathscr{P}(X),\subset)$ 是分配格.

(iv) 在图 1.1.1 中, (b) 和 (c) 都是分配格, 但 (d) 不是分配格. 事实上, $a\wedge(b\vee c)=a\wedge 1=a$, 但 $(a\wedge b)\vee(a\wedge c)=0\vee 0=0\neq a$, 所以式(1.2.1) 不成立.

1.2.3 无限分配律

定义 1.2.4 设 $(L,\leqslant)$ 是完备格, 分别称以下的式(1.2.7) 与式(1.2.8) 为**第一无限分配律与第二无限分配律**:

$$a\wedge(\bigvee_{i\in I}b_i)=\bigvee_{i\in I}(a\wedge b_i), \tag{1.2.7}$$

$$a\vee(\bigwedge_{i\in I}b_i)=\bigwedge_{i\in I}(a\vee b_i). \tag{1.2.8}$$

例 1.2.3 (i) 容易直接验证 $(\mathscr{P}(X),\subset)$ 满足两个无限分配律.

(ii) $(\mathscr{F}(X),\leqslant)$ 也满足两个无限分配律, 因为易证完备的全序集(分别是[0,1]) 满足两个无限分配律, 所以可仿命题 1.2.3 证明 $(\mathscr{F}(X),\leqslant)$ 满足两个无限分配律.

(iii) 设 $(\mathscr{U},\subset)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的全体开集按包含序构成的偏序集, 则 $\mathscr{U}$ 是完备格, 因为任意多个开集之并仍为开集, 它就是这些开集的上确界. 又, 这些开集作为集合取交后再取内部, 就得到这些开集的下确界, 即

$$\sup\mathscr{A}=\bigcup\mathscr{A},\quad \inf\mathscr{A}=(\bigcap\mathscr{A})^{\circ},\qquad \mathscr{A}\subset\mathscr{U},\mathscr{A}\neq\varnothing. \tag{1.2.9}$$

对于 $\mathscr{A}=\{A,B\}$ 的情形则有 $A\wedge B=A\cap B$, 因为两个开集之交为开集, 它等于自己的内部. 这时有

$$A\wedge(\bigvee_{i\in I}B_i)=A\cap(\bigcup_{i\in I}B_i)=\bigcup_{i\in I}(A\cap B_i)=\bigvee_{i\in I}(A\wedge B_i).$$

所以 $(\mathscr{U},\subset)$ 满足第一无限分配律. 但 $(\mathscr{U},\subset)$ 不满足第二无限分配律. 事实上, 设 $A=(0,1),B_n=\left(1-\dfrac{1}{n},2\right)(n=1,2,\cdots)$, 则

$$\wedge\{B_n\mid n=1,2,\cdots\}=(\bigcap_{n\in\mathbf{N}}B_n)^{\circ}=[1,2)^{\circ}=(1,2),$$

所以

$$A\vee(\bigwedge_{n\in\mathbf{N}}B_n)=(0,1)\cup(1,2)=(0,2)-\{1\}.$$

但对每个 $n\in\mathbf{N}$, $A\vee B_n=(0,2)$, 所以 $\bigwedge_{n\in\mathbf{N}}(A\vee B_n)=(0,2)\neq A\vee(\bigwedge_{n\in\mathbf{N}}B_n)$.

1.2.4 滤子与理想

定义 1.2.5 设 $(L,\leqslant)$ 是格, F 是 L 的非空子集. 如果:

(i) F 是**上集**,即当 $a \in F$ 且 $a \leqslant b$ 时有 $b \in F$.

(ii) F 是**下定向集**,即当 $a,b \in F$ 时有 $c \in F$ 使 $c \leqslant a$ 且 $c \leqslant b$. 则称 F 为 L 中的**滤子**. 当 $F \neq L$ 时,称 F 为**真滤子**. 以后不声明时恒设 F 为真滤子.

(iii) 如果真滤子 F 还满足条件当 $a \vee b \in F$ 时有 $a \in F$ 或 $b \in F$,则称 F 为**素滤子**.

注 1.2.1 显然上面的条件(ii) 等价于:

(ii)′ 当 $a,b \in F$ 时 $a \wedge b \in F$.

定义 1.2.6 设$(L, \leqslant)$ 是格,I 是 L 的非空子集. 如果:

(i) I 是**下集**,即,当 $a \in I$ 且 $b \leqslant a$ 时有 $b \in I$.

(ii) I 是定向集,即,当 $a,b \in I$ 时有 $c \in I$ 使 $a \leqslant c$ 且 $b \leqslant c$. 则称 I 为 L 中的**理想**. 当 $I \neq L$ 时,称 I 为**真理想**. 以后不声明时恒设 I 为真理想.

(iii) 如果真理想 I 还满足条件当 $a \wedge b \in I$ 时有 $a \in I$ 或 $b \in I$,则称 I 为**素理想**.

注 1.2.2 定义 1.2.6 中的条件(ii) 等价于:

(ii)′ 当 $a,b \in I$ 时 $a \vee b \in I$.

例 1.2.4 (i) 在格$(\mathbf{R}, \leqslant)$中,任取 $a \in \mathbf{R}$,则$[a, +\infty)$与$(a, +\infty)$都是滤子,并且都是素滤子. $(-\infty, a)$ 与 $(-\infty, a]$ 都是素理想.

(ii) 设$(L, \leqslant)$ 是格,$a \in L$ 且 a 不是 L 的最小元,则

$$\uparrow a = \{x \in L \mid a \leqslant x\} \tag{1.2.10}$$

是滤子,叫由 a 生成的**主滤子**. 设 a 不是 L 的最大元,则

$$\downarrow a = \{x \in L \mid x \leqslant a\} \tag{1.2.11}$$

是理想,叫由 a 生成的**主理想**.

(iii) 在$(\mathscr{P}(X), \subset)$中,设 A 是 X 的含有多于1个元的子集,则 $\uparrow A$ 是滤子,但不是素滤子. 因为这时 A 可表示为两个非空真子集 B 与 C 之并,这时 $B \vee C \in \uparrow A$ 但 $B \notin \uparrow A, C \notin \uparrow A$. 如果 A 是单元素集,则 $\uparrow A$ 是素滤子. 类似地,设 $B \neq X$,则 $\downarrow B$ 是理想. 如果 B 比 X 仅少 1 个元,则 $\downarrow B$ 是素理想.

命题 1.2.5 设$(L, \leqslant)$ 是格,则 F 是 L 中的素滤子当且仅当 $L - F$ 是 L 中的素理想.

证明 设 F 是素滤子,则 F 非空且 $F \neq L$,所以 $L - F \neq \varnothing, L - F \neq L$. 由 F 是上集知 $L - F$ 是下集. 设 $a \in L - F, b \in L - F$,则 $a \notin F, b \notin F$,所以由 F 是素滤子知 $a \vee b \notin F$,即 $a \vee b \in L - F$,所以 $L - F$ 是理想. 设 $a \wedge b \in L - F$,则必有 $a \in L - F$ 或 $b \in L - F$,因为反之将有 $a,b \in F$,从而得出 $a \wedge b \in F$ 的矛盾. 所以 $L - F$ 还是素理想. 反过来可以从 $L - F$ 是素理想证明 F 是素滤子.

定义 1.2.7 设$(L, \leqslant)$与$(M, \leqslant)$是两个格(为简便计,我们用同一记号 $\leqslant$ 表示二者的偏序),$f: L \to M$ 是映射. 如果

$$f(a \vee b) = f(a) \vee f(b), \quad f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b), \quad a,b \in L, \tag{1.2.12}$$

则称 f 为**格同态**或简称为**同态**. 如果 f 还是一一的和满的,则称 f 为**格同构**或**同构**. 这时称 $(L, \leqslant)$ 与 $(M, \leqslant)$ **同构**,记作 $(L, \leqslant) \cong (M, \leqslant)$.

命题 1.2.6 设 $(L, \leqslant)$ 是**有界格**,即,具有最大元 1 和最小元 0 的格,则以下条件等价:

(i) F 是 L 中的素滤子.

(ii) 存在格同态 $f:L \to \{0,1\}$,满足条件 $f(0) = 0, f(1) = 1$ 和 $F = f^{-1}(1)$.

证明 设 F 是 L 中的素滤子,定义 $f:L \to \{0,1\}$ 如下:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in F, \\ 0, & x \in L - F. \end{cases} \tag{1.2.13}$$

因为 $1 \in F, 0 \notin F$,所以 $f(1) = 1, f(0) = 0$. 显然 $F = f^{-1}(1)$. 以下只需证明 f 是格同态. 事实上,设 $a,b \in L$. 如果 $f(a \vee b) = 1$,则 $a \vee b \in F$. 因为 F 是素滤子,所以 $a \in F$ 或 $b \in F$,那么 $f(a) \vee f(b) = 1$. 如果 $f(a \vee b) = 0$,则 $a \vee b \notin F$,那么由 F 为上集知 $a \notin F$ 且 $b \notin F$,从而 $f(a) \vee f(b) = 0 \vee 0 = 0$. 这就证明了 $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$. 类似可证 $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$. 所以 f 是格同态.

反过来,设(ii) 成立. 由 $f(0) = 0$ 和 $f(1) = 1$ 知 $F = f^{-1}(1) \neq L$,且 $F \neq \emptyset$. $F = f^{-1}(1)$ 显然是上集. 设 $a,b \in F$,则 $f(a) = f(b) = 1$,所以由 f 为同态知 $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b) = 1$,即 $a \wedge b \in F$. 这说明 F 是滤子. 最后设 $a \vee b \in F$,则 $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b) = 1$. 所以不可能 $f(a) = f(b) = 0$,即 $f(a) = 1$ 或 $f(b) = 1$ 成立,也即 $a \in F$ 或 $b \in F$,所以 F 是素滤子.

由命题 1.2.5 和命题 1.2.6 得

推论 1.2.1 设 $(L, \leqslant)$ 是有界格,则以下条件等价:

(i) I 是 L 中的素理想.

(ii) 存在格同态 $f:L \to \{0,1\}$,满足条件 $f(0) = 0, f(1) = 1$ 和 $I = f^{-1}(0)$.

习 题 1.2

1. 证明命题 1.2.1.

2. 设 $(\mathscr{F}, \subset)$ 是 $\mathbf{R}$ 上全体闭集按包含序所成的偏序集. 试证 $(\mathscr{F}, \subset)$ 是满足第二无限分配律的完备格. 但 $(\mathscr{F}, \subset)$ 不满足第一无限分配律.

3. 设偏序集 $(L, \leqslant)$ 中任意子集都有上确界,试证 $(L, \leqslant)$ 是完备格.

4. 设 $(H, \leqslant)$ 是满足第一无限分配律的完备格,定义

$$b \to c = \bigvee \{x \in H \mid x \wedge b \leqslant c\}, \quad b,c \in H. \tag{1.2.14}$$

试证

$$a \wedge b \leqslant c \quad \text{当且仅当} \quad a \leqslant b \to c, \quad a,b,c \in H. \tag{1.2.15}$$

再定义

$$\neg a = a \to 0. \tag{1.2.16}$$

试证

$$\neg a \wedge a = 0, \quad a \leqslant \neg\neg a. \tag{1.2.17}$$

$$\text{若 } a \leqslant b, \quad \text{则 } \neg b \leqslant \neg a. \tag{1.2.18}$$

$$\neg\neg\neg a = \neg a. \tag{1.2.19}$$

具有满足以上性质的运算 $\to$ 与 $\neg$ 的完备格叫**完备 Heyting 代数**.

5. 格$(L, \leqslant)$中的真滤子F叫**极大滤子**,若L中不存在真包含F的真滤子. 试证,$(\mathscr{P}(X), \subset)$中的滤子$\mathscr{F}$是极大滤子的充要条件是:对$X$的任一子集$A$,$A \in \mathscr{F}$与$X - A \in \mathscr{F}$有一个且仅有一个成立. 又,$(\mathscr{P}(X), \subset)$中的素滤子一定是极大滤子.

6. 举出格$(L, \leqslant)$和L中滤子F的例子,使$L - F$不是L中的理想.

1.3 Boole 代数

1.3.1 Boole 代数

定义 1.3.1 设$(L, \leqslant)$是有界分配格,1与0分别是L的最大元与最小元. 如果L上有一自映射$'$:$L \to L$满足条件

$$a \vee a' = 1, \quad a \wedge a' = 0, \tag{1.3.1}$$

则称$(L, \leqslant)$为**Boole代数**,运算$'$称为**补运算**. 这时也常用$(L, \leqslant, ')$更明确地表示Boole代数. 设$\{0,1\} \subset M \subset L$,且$M$对$\vee$, $\wedge$, $'$运算封闭,则称M为L的**子 Boole 代数**.

例 1.3.1 (i) 在分配格$(\mathscr{P}(X), \subset)$中规定$A' = X - A (A \in \mathscr{P}(X))$,则$A \vee A' = A \cup A' = X$,$A \wedge A' = A \cap A' = \varnothing$. 因为$X$与$\varnothing$分别是$\mathscr{P}(X)$的最大元与最小元,所以式(1.3.1)成立,$(\mathscr{P}(X), \subset)$是Boole代数,称为**幂集 Boole 代数**. 任取$A \in \mathscr{P}(X)$,则$\{\varnothing, A, A', X\}$是$(\mathscr{P}(X), \subset)$的一个子Boole代数.

(ii) 全序集$\{0,1\}$是最简单的非蜕化的(多于1个元的)Boole代数,这里规定$0' = 1, 1' = 0$.

(iii) Boole代数$\{0,1\}$的n次幂$\{0,1\}^n$也是Boole代数. 事实上,由命题1.2.3(iv)知$\{0,1\}^n$是分配格,且有最大元$(1,\cdots,1)$和最小元$(0,\cdots,0)$. 按点式方法规定补运算,即$(a_1,\cdots,a_n)' = (a_1{}',\cdots,a_n{}')$,则易证式(1.3.1)成立,所以$\{0,1\}^n$是Boole代数. 其实幂指数$n$还可换为一般基数,比如$\omega$. 按同样的方法可验证$\{0,1\}^\omega$也是Boole代数. $\{0,1\}^n$与$\{0,1\}^\omega$也常写为2^n与2^ω. 更一般地,2^X表示全体从X到$\{0,1\}$的映射之集. 从特征函数的观点看,2^X正是X的一切子集之集$\mathscr{P}(X)$,所以$\mathscr{P}(X)$也常写为2^X. 即$(2^X, \leqslant)$是Boole代数,这里$A \leqslant B$即$A \subset B (A, B \subset X)$,我们把集$A$和它的特征函数不加区别,都用$A$表示.

命题 1.3.1 设$(L, \leqslant, ')$是Boole代数,则:

(i) $a'' = a$.

(ii) $a \leqslant b$ 当且仅当 $b' \leqslant a'$.

(iii) $(\bigvee_{i\in I} a_i)' = \bigwedge_{i\in I} a_i', (\bigwedge_{i\in I} a_i)' = \bigvee_{i\in I} a_i'$. (1.3.2)

式(1.3.2) 称为 **De Morgan 对偶律**,只要其中出现的上、下确界存在,等式就成立.

证明 (i) 由命题 1.2.1(iv) 和式(1.3.1) 以及分配律得

$$a'' = a'' \wedge (a \vee a') = (a'' \wedge a) \vee (a'' \wedge a') = (a'' \wedge a) \vee 0 = a'' \wedge a.$$

$$a = a \wedge (a'' \vee a') = (a \wedge a'') \vee (a \wedge a') = a \wedge a''.$$

由以上二式得 $a'' \leqslant a$ 并且 $a \leqslant a''$,所以 $a'' = a$.

(ii) 设 $a \leqslant b$,则 $b' \wedge a \leqslant b' \wedge b = 0$,从而 $b' \wedge a = 0$. 所以

$$b' = b' \wedge (a \vee a') = (b' \wedge a) \vee (b' \wedge a') = b' \wedge a'.$$

这表明 $b' \leqslant a'$. 反之,若 $b' \leqslant a'$,则由已证部分和(i) 得 $a = a'' \leqslant b'' = b$,所以 $a \leqslant b$.

(iii) 由(ii) 知$(\bigvee_{i\in I} a_i)' \leqslant a_j'$ 对每个 $j \in I$ 均成立,所以$(\bigvee_{i\in I} a_i)' \leqslant \bigwedge_{i\in I} a_i'$,反过来,对每个 $j \in I$ 均有$a_j' \geqslant \bigwedge a_i'$,从而由(ii),$a_j \leqslant (\bigwedge a_i')'$,那么 $\bigvee_{i\in I} a_i \leqslant (\bigwedge_{i\in I} a_i')'$. 再由(ii) 和(i) 即得$(\bigvee_{i\in I} a_i)' \geqslant \bigwedge_{i\in I} a_i'$. 所以式(1.3.2) 中的第一个等式成立. 类似可证第二个等式也成立.

1.3.2 Boole 代数中的同余关系与商代数

定义 1.3.2 设$(L, \leqslant, ')$ 是 Boole 代数,$\approx$ 是 L 上的等价关系,如果 $\approx$ 保持运算 $\vee$,$\wedge$ 与 $'$,即当 $a \approx b$ 且 $c \approx d$ 时 $a \vee c \approx b \vee d$,$a \wedge c \approx b \wedge d$,$a' \approx b'$. 则称 $\approx$ 为 L 上的**同余关系**.

命题 1.3.2 设$(L, \leqslant, ')$ 是 Boole 代数,$\approx$ 是 L 上的非平凡的同余关系(即至少有两个同余类). 以$[a]$ 表示 a 所在的同余类,令 $L/\approx = \{[a] \mid a \in L\}$. 规定

$$[a] \leqslant [b] \text{ 当且仅当} [a] = [a \wedge b], \quad [a]' = [a'], \tag{1.3.3}$$

则$(L/\approx, \leqslant, ')$ 也构成 Boole 代数,叫做$(L, \leqslant, ')$ 关于同余关系 $\approx$ 的**商 Boole 代数**.

证明 先证明式(1.3.3) 中的定义是合理的. 事实上,设 $a_1 \approx a$,$b_1 \approx b$,则 $a \approx a \wedge b$ 当且仅当 $a_1 \approx a_1 \wedge b_1$,$a_1 \approx a$ 当且仅当 $a_1' \approx a'$. 由此可知式(1.3.3) 中的定义与$[a]$,$[b]$ 中代表元的选取无关,因而是合理的. 其次证明$(L/\approx, \leqslant)$ 是偏序集. 按式(1.3.3) 的定义,由 $a = a \wedge a$ 知$[a] \leqslant [a]$ 成立,所以 $\leqslant$ 是自反的. 设$[a] \leqslant [b]$ 且$[b] \leqslant [a]$,则由式(1.3.3) 得$[a] = [a \wedge b] = [b \wedge a] = [b]$,可见,$\leqslant$ 是反对称的. 再设$[a] \leqslant [b]$,$[b] \leqslant [c]$,则$[a] = [a \wedge b]$,$[b] = [b \wedge c]$. 所以由 $\approx$ 是同余关系得

$$a \approx a \wedge b \approx a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c \approx a \wedge c,$$

即$[a] = [a \wedge c]$,所以$[a] \leqslant [c]$. 这表明 $\leqslant$ 是传递的. 所以$(L/\approx, \leqslant)$ 是偏序集. 由 $a = a \wedge (a \vee b)$,$b = b \wedge (a \vee b)$ 和式(1.3.3) 知$[a] \leqslant [a \vee b]$,$[b] \leqslant [a \vee b]$. 设$[a] \leqslant [c]$,$[b] \leqslant [c]$,则由 Boole 代数满足分配律以及 $a \approx a \wedge c$,$b \approx b \wedge c$ 得

$$a \vee b \approx (a \wedge c) \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c,$$

即$[a \vee b]=[(a \vee b) \wedge c]$,所以$[a \vee b] \leqslant [c]$.这就证明了$[a \vee b]$是$[a]$与$[b]$的上确界.类似可证$[a \wedge b]$是$[a]$与$[b]$的下确界,即

$$[a] \vee [b]=[a \vee b], \quad [a] \wedge [b]=[a \wedge b], \quad a, b \in L. \tag{1.3.4}$$

由式(1.3.4)以及L满足分配律立即推出$L/\approx$也满足分配律.又,由式(1.3.3)知$[1]$与$[0]$分别是$L/\approx$中的最大元与最小元.由$\approx$是非平凡同余关系知$[1] \neq [0]$,且

$$[a] \vee [a]'=[a \vee a']=[1], \quad [a] \wedge [a]'=[a \wedge a']=[0].$$

所以$(L/\approx, \leqslant, ')$是Boole代数.

命题1.3.3 设$(L, \leqslant, ')$是Boole代数,$\approx$是L上的非平凡的同余关系(即至少有两个同余类).令

$$I=\{x \in L \mid x \approx 0\}. \tag{1.3.5}$$

则I是L中的理想.反过来,设I是L中的理想,规定

$$a \approx b \quad \text{当且仅当} \quad (a \wedge b') \vee (a' \wedge b) \in I, \tag{1.3.6}$$

则$\approx$是L上的非平凡的同余关系.

证明 因为$0 \approx 0$,所以I非空,又,$\approx$非平凡,所以有$a \in L, a \approx 0$不成立,所以$I \neq L$.设$x \in I, y \in I$,则$x \approx 0, y \approx 0$,所以$x \vee y \approx 0 \vee 0=0$,即$x \vee y \in I$.设$x \in I, y \leqslant x$,则$x=x \vee y \approx 0 \vee y=y$,从而由$x \approx 0$得$y \approx 0$,即$y \in I$.所以$I$是$L$中的理想.

反过来,设I是L中的理想,因为$0 \in I$,所以由式(1.3.6)知$a \approx a$,且由式(1.3.6)关于a与b的对称性知若$a \approx b$,则$b \approx a$.所以$\approx$是反身的和对称的.现在设$a \approx b, b \approx c$,则由I是下集知

$$a \wedge b' \in I, \quad a' \wedge b \in I, \quad b \wedge c' \in I, \quad b' \wedge c \in I. \tag{1.3.7}$$

又,

$$a \wedge c'=a \wedge (b \vee b') \wedge c'=(a \wedge b \wedge c') \vee (a \wedge b' \wedge c') \leqslant (b \wedge c') \vee (a \wedge b'),$$
$$a' \wedge c=a' \wedge (b \vee b') \wedge c=(a' \wedge b \wedge c) \vee (a' \wedge b' \wedge c) \leqslant (a' \wedge b) \vee (b' \wedge c).$$

所以由定义1.2.6(ii)和式(1.3.7)知$a \wedge c' \in I, a' \wedge c \in I$,那么$(a \wedge c') \vee (a' \wedge c) \in I$,可见$a \approx c$,$\approx$还是传递的.所以$\approx$是$L$上的等价关系.设$a \approx b$,由式(1.3.6)即得$a' \approx b'$.设$a \approx b$且$c \approx d$,则

$$a \wedge b' \in I, \quad a' \wedge b \in I, \quad c \wedge d' \in I, \quad c' \wedge d \in I. \tag{1.3.8}$$

由De Morgan对偶律知

$$\begin{aligned}(a \vee c) \wedge (b \vee d)' &= (a \vee c) \wedge b' \wedge d' \\ &= (a \wedge b' \wedge d') \vee (c \wedge b' \wedge d') \\ &\leqslant (a \wedge b') \vee (c \wedge d'), \\ (a \vee c)' \wedge (b \vee d) &= a' \wedge c' \wedge (b \vee d) \\ &= (a' \wedge c' \wedge b) \vee (a' \wedge c' \wedge d) \\ &\leqslant (a' \wedge b) \vee (c' \wedge d).\end{aligned}$$

所以由式(1.3.8)以及 I 为理想知

$$[(a \vee c) \wedge (b \vee d)'] \vee [(a \vee c)' \wedge (b \vee d)] \in I.$$

所以 $a \vee c \approx b \vee d$. 类似可证 $a \wedge c \approx b \wedge d$,所以 $\approx$ 是 L 上的同余关系,因为 $1 \notin I$,所以由式(1.3.6)知 $1 \approx 0$ 不成立,可见 $\approx$ 是非平凡的.

设 I 是 L 中的理想,则由命题 1.3.3,I 可按式(1.3.6)导出 L 上的一个同余关系,那么由命题 1.3.2,可得一商 Boole 代数 $L/\approx$,这个代数也常记作 L/I.

命题 1.3.4 设 I 是 Boole 代数$(L, \leqslant, ')$ 中的素理想,则

$$L/I \cong \{0,1\}, \tag{1.3.9}$$

即 L 关于素理想的商 Boole 代数同构于仅含两个元的 Boole 代数$\{0,1\}$.

证明 因为 I 是素理想,所以任取 $a \in L$,由 $a \wedge a' = 0 \in I$ 知 $a \in I$ 或 $a' \in I$,若 $a \in I$,则

$$(a \wedge 0') \vee (a' \wedge 0) = (a \wedge 1) \vee 0 = a \in I.$$

所以由式(1.3.6)知 $a \approx 0$. 若 $a \notin I$,则 $a' \in I$,这时由

$$(a \wedge 1') \vee (a' \wedge 1) = (a \wedge 0) \vee a' = a' \in I$$

和式(1.3.6)知 $a \approx 1$. 可见 L 关于 $\approx$ 只有两个同余类[0]和[1],所以式(1.3.9)成立.

例 1.3.2 在$(\mathscr{P}(X), \subset)$中任取一单元素集$\{a\}$,令

$$I = \{A \in \mathscr{P}(X) \mid a \notin A\}, \tag{1.3.10}$$

则易验证 I 是 $\mathscr{P}(X)$ 中的素理想. 这时 L/I 只含两个同余类,一个是 I 自身,另一个则是 $\uparrow\{a\}$,即,X 的一切包含元素 a 的子集之集. 这里 $I = [\varnothing]$ 和 $\uparrow\{a\} = [X]$ 分别是 L/I 的最小元 0 和最大元 1.

注 1.3.1 由式(1.3.10)可见,$\mathscr{P}(X)$ 中可以有许多不同的素理想. 实际上 $\mathscr{P}(X)$ 中素理想的个数不少于 X 中元素的个数. 显然这些素理想的交等于$\{\varnothing\}$. 这一事实可以推广为:

命题 1.3.5 设$(L, \leqslant, ')$是 Boole 代数,则 L 中所有素理想的交等于$\{0\}$.

证明 因为每个理想均含有 L 的最小元 0,所以$\{0\}$包含于每个素理想. 任取 $a \neq 0$,以下只需证 L 中有素理想 I 使 $a \notin I$. 不妨设 $a \neq 1$,这时 $a' \neq 0$,显然 a 不属于主理想 $\downarrow a'$,因为反之则由 $a' \in \downarrow a'$ 得 $a \vee a' = 1 \in \downarrow a'$,从而 $a' = 1$. 这与 $a \neq 0$ 相矛盾!令 $\mathscr{S} = \{I \mid I$ 是 L 中的理想且 $a \notin I\}$,则由 $\downarrow a' \in \mathscr{S}$ 知 $\mathscr{S}$ 非空. 设 $\mathscr{S}^*$ 是 $\mathscr{S}$ 中的理想按包含序所成的链. 易证 $\mathscr{S}^*$ 中各理想的并 $\bigcup \mathscr{S}^*$ 仍是不含 a 的理想,它自然是 $\mathscr{S}^*$ 中各理想的上界. 即,$\mathscr{S}$ 中的链均有上界. 所以由 Zorn 引理知 $\mathscr{S}$ 中有一极大元,记为 I^*. 可以证明 I^* 就是(不含 a 的)素理想. 事实上,任取 $x \in L$. 设 $x \notin I^*$,令

$$\bar{I} = \{u \vee t \mid u \leqslant x, t \in I^*\}.$$

则易见 $\bar{I}$ 是下集,且 $\bar{I}$ 中任二元之并仍属于 $\bar{I}$,即 $\bar{I}$ 满足理想的条件(i)与(ii). 因为 $\bar{I}$ 包含着极大理想 I^*,且至少比 I^* 多 1 个元 x,所以有 $a \in \bar{I}$,即,存在 $t_1 \in I^*$ 使 $a \leqslant x \vee t_1$. 再设 $y \notin I^*$,同理有 $t_2 \in I^*$ 使 $a \leqslant y \vee t_2$. 令 $t = t_1 \vee t_2$,则 $t \in I^*$

且 $a \leqslant x \vee t, a \leqslant y \vee t$，从而

$$a \leqslant (x \vee t) \wedge (y \vee t) = (x \wedge y) \vee t.$$

所以由 $a \notin I^*$ 知 $x \wedge y \notin I^*$. 所以 I^* 是素理想.

1.3.3 Boole 代数的表示定理和完备性定理

命题 1.3.6(Boole 代数的表示定理) 任一 Boole 代数都同构于某幂集 Boole 代数$(\mathscr{P}(X), \subset)$ 的子 Boole 代数，也即形如$\{0,1\}^X$ 的 Boole 代数的子代数.

证明 设$(L, \leqslant, ')$ 是 Boole 代数，令 $L_0 = L - \{0\}$，任取 $a \in L_0$，由命题 1.3.5，存在 L 中的素理想 I_a 使 $a \notin I_a$，由命题 1.3.4，$L/I_a \cong \{0,1\}$. 令 $M = \prod_{x \in L_0} L/I_x$，则 $M \cong \{0,1\}^{L_0}$. 作映射 $\varphi: L \to M$ 如下：

$$\varphi(y)(a) = [y]_a, \quad y \in L, a \in L_0. \tag{1.3.11}$$

这里$[y]_a$ 表示 y 在 L/I_a 中的同余类($[y]_a$ 只能是$[0]_a$ 或$[1]_a$)，$\varphi(y)(a)$ 表示 $\varphi(y)$ 在 $\prod_{x \in L_0} L/I_x$ 中的 a- 坐标，即 $\varphi(y)$ 作为 M 中的元在射影映射 $\pi_a: M \to L/I_a$ 下的像. 因为对每个 $x \in L_0$ 均有 $1 \in [1]_x$，所以 $\varphi(1) = 1_M$. 同理 $\varphi(0) = 0_M$. 即 $1_M, 0_M \in \varphi(L)$. 设 $x, y \in L$，则

$$\begin{aligned}\varphi(x \vee y)(a) &= [x \vee y]_a = [x]_a \vee [y]_a \\ &= \varphi(x)(a) \vee \varphi(y)(a) = (\varphi(x) \vee \varphi(y))(a), \quad a \in L.\end{aligned}$$

所以 $\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee \varphi(y)$. 类似可证 $\varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge \varphi(y), \varphi(x') = (\varphi(x))'$. 所以 φ 是同态. 易证 Boole 代数的同态像仍为 Boole 代数，所以 $\varphi(L)$ 是 M 的子 Boole 代数. $\varphi: L \to \varphi(L)$ 自然是满射. 以下证明 φ 是单射. 设 $x, y \in L, x \neq y$，则 $x \leqslant y$ 与 $y \leqslant x$ 至少有一个不成立. 设 $x \nleqslant y$，则 $x \notin \downarrow y$. 这时可仿命题 1.3.5 的证明得出一个包含 y 但不包含 x 的素理想 I_y. 由式(1.3.6) 知 $y \in [0]_y$，但 $x \notin [0]_y$，所以 $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. 这证明了 $\varphi: L \to \varphi(L)$ 是同构映射，即，L 同构于 M 或 $\{0,1\}^{L_0}$ 的一个子 Boole 代数，也即 L 同构于$(\mathscr{P}(L_0), \subset)$ 的一个子 Boole 代数.

注 1.3.2 幂集 Boole 代数 $\mathscr{P}(L_0)$ 是简单而直观的，因为这时 $\vee, \wedge, '$ 就是通常集的并、交、补运算. 如果把集换成相应的特征函数，则$\{0,1\}^{L_0}$ 是若干最简单的 Boole 代数$\{0,1\}$ 的乘积，因为乘积中元的序是点式序，且每个坐标只有 0，1 两个选择，所以不论指数$|L_0|$有多大，它的结构都是简单明了的. 这正是 Boole 代数表示定理的意义所在. 又，Boole 代数还有一个 Stone 表示定理，它说一个格 L 是 Boole 代数的充要条件是它同构于某个紧零维 Hausdorff 拓扑空间的开集格. 不过这个定理与本书内容无关. 下面要用到的是命题 1.3.6 所述的表示定理.

定义 1.3.3 一个 **Boole 等式**是一个公式

$$f(x_1, \cdots, x_n) = 1, \tag{1.3.12}$$

这里 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 是由各变元 $x_1, \cdots, x_n$ 通过二元运算 $\vee$ 与 $\wedge$ 以及一元运算 $'$ 作

用后得出的函数.

例 1.3.3 $x_1 \vee x_1' = 1$, $(x_1 \wedge x_2) \vee x_1' \vee x_2' = 1$ 都是 Boole 等式,如果把 x_1 与 x_2 理解为 Boole 代数中的元,把 $\vee$, $\wedge$, $'$ 理解为这个 Boole 代数中的运算,把 1 理解为这个 Boole 代数中的最大元,则以上两个 Boole 等式是成立的. 又, $x_1 \vee x_1 = 1$ 和 $x_1 \wedge x_2' = 1$ 也都是 Boole 等式,但当 x_1 与 x_2 可以变动时,它们在任何非平凡的 Boole 代数中都不成立.

命题 1.3.7(Boole 代数的完备性定理) 一个 Boole 等式在每个 Boole 代数中都成立的充要条件是它在 Boole 代数 $\{0,1\}$ 中成立.

证明 只需证明一个 Boole 等式若在 $\{0,1\}$ 中成立,则它在每个 Boole 代数中都成立. 设

$$f(\eta_1, \cdots, \eta_n) = 1 \tag{1.3.13}$$

是一个 Boole 等式,它在 $\{0,1\}$ 中成立,即,无论给 $\eta_1, \cdots, \eta_n$ 赋予怎样的 0-1 序列值,经 f 运算后其值等于 1. 现在考虑 Boole 代数 $M = \{0,1\}^X (X \neq \varnothing)$,令 $\eta_1, \cdots, \eta_n$ 在 M 中取值. 这时每个 η_i 有 $|X|$ 个坐标. 以 $(\eta_i)_x$ 记 η_i 的 x- 坐标 $(x \in X)$,则各 η_i 在 M 中的运算可按点实现,即

$$(\eta_i')_x = ((\eta_i)_x)', \quad (\eta_i \vee \eta_j)_x = (\eta_i)_x \vee (\eta_j)_x, \quad (\eta_i \wedge \eta_j)_x = (\eta_i)_x \wedge (\eta_j)_x. \tag{1.3.14}$$

由假设条件,

$$f((\eta_1)_x, \cdots, (\eta_n)_x) = 1_x, \quad x \in X.$$

所以由式(1.3.14) 及 $(f(\eta_1, \cdots, \eta_n))_x = f((\eta_1)_x, \cdots, (\eta_n)_x)$ 得

$$f(\eta_1, \cdots, \eta_n) = \prod_{x \in X} f((\eta_1)_x, \cdots, (\eta_n)_x) = \prod_{x \in X} 1_x = 1_M.$$

即 Boole 等式(1.3.13) 在 M 中成立. 又,一个 Boole 等式若在某 Boole 代数中成立,则它显然也在这个 Boole 代数的各子代数中成立. 所以由命题 1.3.6 即得 Boole 代数的完备性定理.

注 1.3.3 设 $(L, \leqslant, ')$ 是 Boole 代数. 在 L 上定义蕴涵运算 $\rightarrow: L^2 \rightarrow L$ 为

$$a \rightarrow b = a' \vee b, \quad a, b \in L. \tag{1.3.15}$$

则

(i) 设 $\approx$ 是 L 上保持运算 $\vee$, $\wedge$ 与 $'$ 的同余关系,则由式(1.3.15) 知 $\approx$ 也保持蕴涵运算 $\rightarrow$,从而在商 Boole 代数 $(L/\approx, \leqslant, ')$ 中有 $[a] \rightarrow [b] = [a \rightarrow b] = [a' \vee b] = [a]' \vee [b]$.

(ii) 定义 1.3.3 中的 Boole 等式概念也可以作形式上的扩充,即式(1.3.12) 的函数 f 中也允许出现蕴涵运算. 因为由式(1.3.15) 知 $a \rightarrow b$ 只不过是 $a' \vee b$ 的另一种写法,所以这种扩充形式的 Boole 等式与原 Boole 等式没有实质的不同. 因而 Boole 代数的完备性定理对这种扩充形式的 Boole 等式仍成立.

习 题 1.3

1. 设 L,M 是 Boole 代数，$f:L\to M$ 是同态映射（即，f 保 $\vee$，$\wedge$ 与 $'$）. 试证 $f(L)$ 是 M 的子 Boole 代数.

2. 设 $L=\{1,2,3,5,6,10,15,30\}$ 是 30 的各个因子组成之集. 在 L 中规定 $a\leqslant b$ 当且仅当 $a\mid b$ （a 整除 b），$a'=\dfrac{30}{a}$. 试证：

(i) $(L,\leqslant,')$ 是 Boole 代数.（提示：先证 $\leqslant$ 是偏序，再证 $(L,\leqslant)$ 是有界格，最后借助(ii) 完成证明）

(ii) $(L,\leqslant,')\cong(\mathscr{P}(X),\subset)$，这里 $X=\{a,b,c\}$，并画出类似于图 1.1.1 的图来表明二者间的一一对应.

又，36 的各因子之集是否也可以按上述方法作成 Boole 代数？42 呢？

3. 设 X 是非空集，$+$ 与 $\cdot$ 是 X 上的二元运算，$'$ 是 X 上的一元运算，且 X 有特定元 0 与 1，如果：

(i) $+$ 与 $\cdot$ 都是交换的与结合的.

(ii) 0 是加法 $+$ 的零元，1 是乘法 $\cdot$ 的单位元.

(iii) $+$ 与 $\cdot$ 是相互分配的.

(iv) $a+a'=1$，$a\cdot a'=0$.

则称 $(X,+,\cdot,',0,1)$ 为 Boole 代数，试证：若规定 $a\leqslant b$ 当且仅当 $a+b=b$，则 $(X,\leqslant,')$ 成为定义 1.3.1 意义下的 Boole 代数. 反过来，设 $(L,\leqslant,')$ 是定义 1.3.1 意义下的 Boole 代数，设 $+$ 与 $\cdot$ 分别为 $\vee$ 与 $\wedge$，试证 $(L,+,\cdot,',0,1)$ 是本题意义下的 Boole 代数.

第 2 章　命题演算

2.1　命题及其符号化

2.1.1　简单命题与复合命题

命题就是陈述句，以下各陈述句都是命题：

(i) 今天是星期二.

(ii) 并非今天是星期二.

(iii) 16 是偶数，并且16 是素数.

(iv) $\sqrt{x^2}$ 等于 x，或者 $\sqrt{x^2}$ 等于 $-x$.

(v) 如果今天是星期二，那么明天是中秋节.

(vi) 如果并非明天是中秋节，那么并非今天是星期二.

以上(i) 是简单陈述句，(ii) ～ (vi) 中画黑线的部分也都是简单陈述句，它们都不再含有更简单的陈述句. 这些陈述句就是简单命题. 命题(ii) ～ 命题(vi) 都不是简单陈述句，它们是复合命题. 复合命题由简单命题通过连接词“并非”、“并且”、“或者” 以及“如果 ……，那么 ……” 等组合而成.

命题演算理论不关心一个个具体的简单命题是真还是假. 比如，命题演算理论不关心命题(i) 和命题(v) 是否为真，它关心的是各种命题之间的关系，以下关系就属于命题演算研究的范围：

“如果命题(i) 为真，则命题(ii) 为假”.

“如果命题(ii) 为真，则命题(i) 为假”.

“命题(v) 为真当且仅当命题(vi) 为真”.

再如，命题演算理论不关心“并非张三又高、又胖、又懒” 是真还是假，但它知道上述命题和“张三不高、或者不胖、或者不懒” 是等价的.

2.1.2　用符号表示命题

数理逻辑的特点在于用符号去表示命题. 在命题演算中我们用 p_1，p_2，… 去表示简单命题，并把它们叫**命题变元**或**原子命题**，然后引入逻辑连接词 $\neg$ 表示“并非”，并分别用逻辑连接词 $\wedge$、$\vee$ 与 $\rightarrow$ 表示“并且”、“或者” 与“蕴涵”，这样就可以由原子命题出发借助于上述的连接词去表达各种复杂的复合命题了. 比如，用 p_1 表示前面的命题(i)，则命题(ii) 就是 $\neg p_1$. 分别用 p_3 和 p_4 表示“16 是偶数” 和“16 是素数”，则命题(iii) 就是 $p_3 \wedge p_4$. 分别用 p_5 和 p_6 表示“今天是星期二” 和“明天是中秋节” 那么(v) 和(vi) 就分别可表示为 $p_5 \rightarrow p_6$ 和 $\neg p_6 \rightarrow \neg p_5$. 分别用 p_7，p_8 和

p_9 表示“张三高”、“张三胖”和“张三懒”，则上节末的两个命题就可以分别表示为 $\neg(p_7 \wedge p_8 \wedge p_9)$ 和 $\neg p_7 \vee \neg p_8 \vee \neg p_9$. 这时上一节的最后两个论断就可分别表示为

$$p_5 \rightarrow p_6 \approx \neg p_6 \rightarrow \neg p_5 \tag{2.1.1}$$

和

$$\neg(p_7 \wedge p_8 \wedge p_9) \approx \neg p_7 \vee \neg p_8 \vee \neg p_9. \tag{2.1.2}$$

这里“$\approx$”表示逻辑等价，它的严格定义将在以后给出. 用符号表示命题可以精确而且广泛地反映命题间的关系. 以式(2.1.2)为例，它反映了一类命题间的等价关系，不论 p_7、p_8 和 p_9 表示什么命题，具有式(2.1.2)左边结构的复合命题总是和具有式(2.1.2)右边结构的复合命题等价. 比如，分别用 p_7、p_8 和 p_9 表示“A 是下集”、“A 有最大元”和“A 是链”，则“并非 A 又是下集、又有最大元、又是链”就等价于“并非 A 是下集、或并非 A 有最大元、或并非 A 是链”，也即等价于“A 不是下集、或 A 没有最大元、或 A 不是链”. 符号化的方法是从实际背景中抽象出来的，命题演算这种符号化的理论自然也就可以用于解决实际问题.

一个原子命题 p_i 既可以表示真命题，也可以表示假命题，所以它也叫做命题变元，但由原子命题通过 $\neg$，$\vee$，$\wedge$ 与 $\rightarrow$ 等连接词组成的复合命题则可以是永真的命题，比如 $p_1 \rightarrow p_1$，$(p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow (\neg p_2 \rightarrow \neg p_1)$ 和 $\neg(p_1 \wedge p_2) \rightarrow (\neg p_1 \vee \neg p_2)$ 等都是永真命题，不论 p_1 与 p_2 是真还是假，这些复合命题总是真的. 当然，更多的复合命题其真假依赖于组成它们的原子命题的真假，比如，$p_1 \rightarrow p_2$，$p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$ 等就是如此，前者只有当 p_2 为真或 p_1 为假时才是真的，后者只有当 p_1，p_2，p_3 都真时才是真的. 注意，在本章中我们把原子命题作为整体来对待，不再考虑什么是它的主语，什么是它的谓语. 所以这种逻辑叫命题演算或命题逻辑. 在下一章中我们将进一步把命题分拆开来，研究主语、谓语等，那是谓词演算或谓词逻辑的内容了.

习 题 2.1

1. 举出简单命题 p_1 与 p_2 的例子使得：

(i) $p_1 \rightarrow p_2$ 为真，$p_2 \rightarrow p_1$ 为假.

(ii) $p_1 \rightarrow p_2$ 和 $p_2 \rightarrow p_1$ 都真，但 p_1 与 p_2 不同.

2. 举两个例子表明式(2.1.1)的正确性.

3. 举两个例子表明式(2.1.2)的正确性.

2.2 命题演算的语义理论

2.2.1 公式与赋值

上面已经说过，数理逻辑的方法是符号化的方法. 对于命题演算而言，先用一

个可数集$S=\{p_1,p_2,\cdots\}$表示原子命题，并选用尽可能少但已够用的一组逻辑连接词，比如选定否定连接词$\neg$和蕴涵连接词$\rightarrow$，然后就可通过S与$\{\neg,\rightarrow\}$构作各种复合命题并展开演算理论.

定义 2.2.1　设$S=\{p_1,p_2,\cdots\}$，作$F(S)$如下：

(i) $p_1,p_2,\cdots\in F(S)$.

(ii) 若$A,B\in F(S)$，则$\neg A,A\rightarrow B\in F(S)$.

(iii) $F(S)$中的元都可通过(i)与(ii)而得到.

$F(S)$是S生成的$(\neg,\rightarrow)$型的**自由代数**. S中的元叫**原子命题**、**命题变元**或**原子公式**，$F(S)$中的元叫**命题**或**合式公式**，简称**公式**. 公式有时也叫做 wff，即 well formed formula 的缩写.

例 2.2.1　$p_1,\neg p_2,\neg p_1\rightarrow p_2,p_1\rightarrow(\neg p_2\rightarrow p_3)$和$(p_1\rightarrow p_2)\rightarrow((p_3\rightarrow p_1)\rightarrow(p_3\rightarrow p_2))$等都是公式.

以上并未用到逻辑连接词$\vee$与$\wedge$，其实它们都可以用$\neg$与$\rightarrow$去表达. 我们规定

$$A\vee B\text{ 是 }\neg A\rightarrow B\text{ 的简写，}\tag{2.2.1}$$

$$A\wedge B\text{ 是 }\neg(A\rightarrow\neg B)\text{ 的简写 .}\tag{2.2.2}$$

那么像$p_1\vee p_2,\neg(p_1\wedge p_2\wedge p_3)$等也就都是公式了. $A\vee B$称为A与B的析取，$A\wedge B$称为A与B的合取.

公式有好坏之分，我们通过“裁判打分”的方法来确定哪些公式是好的，哪些公式是坏的，哪些公式是不好不坏的.

设$(L,\leqslant,')$是 Boole 代数，把补运算改写为$\neg$，并规定

$$a\rightarrow b=\neg a\vee b,\quad a,b\in L,\tag{2.2.3}$$

则L也成为一个$(\neg,\rightarrow)$型的代数. 特别是最简单的非平凡 Boole 代数$\{0,1\}$是$(\neg,\rightarrow)$型的代数，这里

$$\neg 0=1,\neg 1=0,a\rightarrow b=0\quad\text{当且仅当}\quad a=1\text{ 且 }b=0.\tag{2.2.4}$$

我们就用$\{0,1\}$作为“裁判”们的打分表，每个“裁判”只给原子公式打分，这时复合公式的分值可自然地由式(2.2.4)算出. 比如，若“裁判”给p_1打 1 分，给p_2打 0 分，则由式(2.2.4)知$p_1\rightarrow p_2$得 0 分. 这时$p_1\wedge p_2$也得 0 分，$p_1\vee p_2$得 1 分. 严格地讲，我们有

定义 2.2.2　设$v:F(S)\rightarrow\{0,1\}$是映射，若v是$(\neg,\rightarrow)$型的同态，即

$$v(\neg A)=\neg v(A),\quad v(A\rightarrow B)=v(A)\rightarrow v(B),\tag{2.2.5}$$

则称v为$F(S)$的**赋值**，$v(A)$也叫公式A的赋值. $F(S)$的全体赋值之集记作Ω.

注 2.2.1　(i) 赋值就是我们说的“裁判”，Ω就是“裁判团”. 这种借助于$F(S)$以外的 Boole 代数$\{0,1\}$和赋值来研究逻辑的方法叫**语义理论**(semantics).

(ii) 任一公式的赋值都是一个数字 0 或 1，所以式(2.2.5)中两个等式右边都

按式(2.2.4)去计算.

(iii) 因为$F(S)$是S生成的自由代数,所以一个赋值v完全由它在原子公式集S上的值所决定,即v由$v\mid S$所决定.这是因为一旦v在各原子公式$p_1,p_2,\cdots$处的值已确定,则v在$\neg p_1,p_1\to p_2,(p_1\to p_2)\to p_3$等公式处的值就可按式(2.2.5)计算出来.比如,设$A=p_1\to\neg(p_2\to p_3)$,则$v(A)$的值完全由$v(p_1),v(p_2)$和$v(p_3)$的值所决定,见表2.2.1:

表 2.2.1

$v(p_1)$	$v(p_2)$	$v(p_3)$	$v(p_1\to\neg(p_2\to p_3))$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

反过来,任一映射$v_0:S\to\{0,1\}$都可以扩充为一个赋值$v:F(S)\to\{0,1\}$,满足条件$v_0=v\mid S$.

(iv) 设$v:F(S)\to\{0,1\}$是赋值,则v保持$F(S)$中的运算$\neg$与$\to$.又,由式(2.2.1)与式(2.2.2)知$\vee$与$\wedge$均可由$\neg$与$\to$表达,所以v也保运算$\vee$与$\wedge$,即

$$v(A\vee B)=v(A)\vee v(B),\quad v(A\wedge B)=v(A)\wedge v(B),\tag{2.2.6}$$

这里$\{0,1\}$中的运算$\vee$与$\wedge$也像式(2.2.1)与式(2.2.2)一样,$a\vee b$与$a\wedge b$分别表示$\neg a\to b$与$\neg(a\to\neg b)$.容易验证

$$a\vee b=\max\{a,b\},\qquad a\wedge b=\min\{a,b\}.\tag{2.2.7}$$

2.2.2 重言式与矛盾式

定义 2.2.3 设$A\in F(S)$,若对每个赋值$v\in\Omega$都有$v(A)=1$,则称A为**重言式**(tautology).若对每个赋值$v\in\Omega$都有$v(A)=0$,则称A为**矛盾式**(contradiction).全体重言式之集与全体矛盾式之集分别记作Tau与Contr.A是重言式也记作$\models A$.

通俗地说,若每个裁判都给A打1分,A就是好公式,叫重言式.若每个裁判都给A打0分,则A就是坏公式,叫矛盾式.当然,大多数公式既不好也不坏,既不是重言式也不是矛盾式.

例 2.2.2 容易通过对p_1与p_2的各种可能的赋值直接验证$p_1\to p_1,p_1\to(p_2\to p_1)$等都是重言式,$\neg(p_1\to p_1),\neg p_1\wedge p_1$等都是矛盾式,$p_1\to p_2,p_1\wedge p_2\to$

p_3，$p_1 \vee p_2$ 等既非重言式，也非矛盾式.

定义 2.2.4 设 $A,B \in F(S)$. 如果对每个 $v \in \Omega$ 均有 $v(A)=v(B)$，则称 A 与 B **逻辑等价**，记作 $A \approx B$.

命题 2.2.1 设 $A,B \in F(S)$，则下列条件彼此等价：

(i) $A \approx B$.

(ii) $A \to B \in \mathrm{Tau}$ 且 $B \to A \in \mathrm{Tau}$.

(iii) $A \leftrightarrow B \in \mathrm{Tau}$，这里 $A \leftrightarrow B = (A \to B) \wedge (B \to A)$.

(iv) $A \to B \approx B \to A$.

证明 (i)⇒(ii). 设 $A \approx B$，任取 $v \in \Omega$，则 $v(A)=v(B)$. 所以由式(2.2.5) 和式(2.2.4) 知 $v(A \to B) = v(A) \to v(B) = 1$，所以 $A \to B \in \mathrm{Tau}$. 同理 $B \to A \in \mathrm{Tau}$.

(ii)⇒(iii). 设 $A \to B, B \to A \in \mathrm{Tau}$，则任取 $v \in \Omega$，有 $v(A \to B) = v(B \to A) = 1$，所以由式(2.2.6) 得 $v(A \leftrightarrow B) = v((A \to B) \wedge (B \to A)) = v(A \to B) \wedge v(B \to A) = 1 \wedge 1 = 1$. 所以 $A \leftrightarrow B \in \mathrm{Tau}$.

(iii)⇒(iv). 设 $A \leftrightarrow B \in \mathrm{Tau}$，则任取 $v \in \Omega$，有 $v(A \to B) \wedge v(B \to A) = 1$，从而 $v(A \to B) = v(B \to A) = 1$，所以 $A \to B \approx B \to A$.

(iv)⇒(i). 设 $A \to B \approx B \to A$，则任取 $v \in \Omega$，有 $v(A \to B) = v(B \to A)$. 由式(2.2.5) 得 $v(A) \to v(B) = v(B) \to v(A)$. 再由式(2.2.4) 知 $v(A) \to v(B) = v(B) \to v(A) = 0$ 不可能，所以 $v(A) \to v(B) = v(B) \to v(A) = 1$. 这时再由式(2.2.4) 知 $v(A) = v(B)$ 成立. 所以由 v 的任意性知 $A \approx B$.

命题 2.2.2 设 $A,B,C \in F(S)$，则

$$A \vee B \approx B \vee A, \quad A \wedge B \approx B \wedge A.$$

$$A \vee (B \vee C) \approx (A \vee B) \vee C, \quad A \wedge (B \wedge C) \approx (A \wedge B) \wedge C.$$

$$A \wedge (B \vee C) \approx (A \wedge B) \vee (A \wedge C), \quad A \vee (B \wedge C) \approx (A \vee B) \wedge (A \vee C).$$

即在逻辑等价的意义下，$\vee$ 与 $\wedge$ 都是交换的与结合的，并且可以相互分配.

证明 因为 0,1 两个数字的取大与取小运算是交换的与结合的，并且是相互分配的，所以由式(2.2.6) 即得本命题.

注 2.2.2 (i) 式(2.2.4) 中的条件"$a \to b = 0$ 当且仅当 $a=1$ 且 $b=0$"也可以写成"$a \to b = 1$ 当且仅当 $a=1$ 且 $b=0$ 不成立". 所谓"$a=1$ 且 $b=0$ 不成立"即 $a=b=0$ 或 $a=b=1$ 或 $a=0$ 且 $b=1$. 这可用 $a \leqslant b$ 来概括，所以式(2.2.4) 中关于 $a \to b$ 的定义也可写成：

$$a \to b = 1 \quad \text{当且仅当} \quad a \leqslant b. \tag{2.2.8}$$

利用式(2.2.8) 证明命题 2.2.1 会更方便一些. 比如，由式(2.2.8) 立即看出 $a=b$ 当且仅当 $a \to b = b \to a = 1$. 所以(i) 与(ii) 等价. 这一点还可以用于上面的证明 (iv)⇒(i) 中.

(ii) 由命题 2.2.2，在逻辑等价的意义下，我们可以谈论"$A_1,\cdots,A_n$ 的析取"而

不管哪两个公式先作析取，哪两个其次，等等. 并以 $\vee\{A_i \mid i=1,\cdots,n\}$ 来表示 $A_1,\cdots,A_n$ 的析取. 对合取也有类似约定.

命题2.2.3(语义MP规则) 设 $A,B\in F(S)$. 如果 $A\to B\in \mathrm{Tau}$ 且 $A\in \mathrm{Tau}$，则 $B\in \mathrm{Tau}$.

证明 任取 $v\in\Omega$. 由 $A\to B\in \mathrm{Tau}$ 知 $v(A)\to v(B)=1$，所以由式(2.2.8)知 $v(B)\geqslant v(A)$. 但 $A\in \mathrm{Tau}$，$v(A)=1$，所以 $v(B)=1$，从而 $B\in \mathrm{Tau}$.

注 2.2.3 在2.3节中将讨论命题演算的语构理论，即不借助于 $F(S)$ 以外的 $\{0,1\}$ 和赋值而在 $F(S)$ 自身中展开的形式化的推理理论. 在那里最基本的推理规则是 Modus Ponens，简称 MP 规则或 MP，也称为分离规则，它说从 $A\to B$ 与 A 可得 B. 特别是当 $A\to B$ 与 A 都是(以后要讲的)“定理”时，B 也是“定理”. 本节中只讲语义理论，因为命题2.2.3的结论“若 $A\to B$ 与 A 都是重言式，则 B 也是重言式”与上述的 MP 规则相对应，所以我们称其为语义 MP 规则.

2.2.3 由合式公式导出的 Boole 函数

定义 2.2.5 函数 $f:\{0,1\}^n\to\{0,1\}$ 叫 n 元 Boole 函数($n\in\mathbf{N}$).

通俗地讲，n 元Boole函数就是以长度为 n 的0-1序列为变元并在 $\{0,1\}$ 中取函数值的函数. 如设 $f(0,0)=f(1,1)=f(0,1)=1$，$f(1,0)=0$，则得一二元 Boole 函数.

设 A 是 $F(S)$ 中任一公式，则 A 可借助于赋值而导出一个 Boole 函数.

定义 2.2.6 设 $A(p_1,\cdots,p_n)$ 是含有 n 个命题变元的合式公式，它由 $p_1,\cdots,p_n$ 通过逻辑连接词 $\neg,\to,\vee$ 与 $\wedge$ 等连接而成. 设 $(x_1,\cdots,x_n)\in\{0,1\}^n$. 分别用 $x_1,\cdots,x_n$ 取代 $A(p_1,\cdots,p_n)$ 中的 $p_1,\cdots,p_n$，并按式(2.2.4)和式(2.2.7)理解 $\neg$，$\to$，$\vee$ 与 $\wedge$，则得一 n 元函数，记作 $\overline{A}(x_1,\cdots,x_n)$，叫做**公式 A 导出的 Boole 函数**.

由公式 A 可以很方便地得到它导出的Boole函数 $\overline{A}$，只要把 A 中的原子公式 p_i 换成 $\{0,1\}$ 中的变元 x_i 即可. 例如，若 $A=p_1\to p_2$，则 $\overline{A}(x_1,x_2)=x_1\to x_2$. 若 $A=\neg p_1\to(p_2\vee p_3)$，则 $\overline{A}(x_1,x_2,x_3)=\neg x_1\to(x_2\vee x_3)$ 等. 当然，还可以利用式(2.2.4)和式(2.2.7)对所得 Boole 函数进行化简，如 $\neg x_1\to(x_2\vee x_3)$ 可化简为 $x_1\vee x_2\vee x_3$，即 $\max\{x_1,x_2,x_3\}$，因为由式(2.2.4)与式(2.2.7)易验证 $\neg a\to b=a\vee b$.

既然 $\overline{A}(x_1,\cdots,x_n)$ 由 $x_1,\cdots,x_n$ 通过 $\neg,\to,\vee$ 与 $\wedge$ 等连接而成的方式恰如 $A(p_1,\cdots,p_n)$ 由 $p_1,\cdots,p_n$ 通过 $\neg,\to,\vee$ 与 $\wedge$ 等连接而成的方式，所以由赋值 v 保持各关系 $\neg,\to,\vee$ 与 $\wedge$ 知下述命题成立，其中(ii)是(i)的直接推论.

命题 2.2.4 设 $A(p_1,\cdots,p_n)\in F(S)$，$v\in\Omega$，则：

(i) $$v(A)=\overline{A}(v(p_1),\cdots,v(p_n)). \tag{2.2.9}$$

(ii) A 是否为重言式可在有限步之内判定，因为只有 2^n 个互不相同的 $(v(p_1),\cdots,v(p_n))$.

基于同样的道理，设$(L,\leqslant,')$是任一 Boole 代数，则(i)对同态$v:F(S)\to L$也成立.

在上面已经看到，每个合式公式都导出一个 Boole 函数，那么是否每个 Boole 函数都可由某合式公式导出呢?答案是肯定的.

命题 2.2.5 每个 Boole 函数都可由某合式公式导出.

证明 设$f:\{0,1\}^n\to\{0,1\}$是n元 Boole 函数. 如果f恒等于 0，令$A=(\neg p_1\wedge p_1)\wedge p_2\wedge\cdots\wedge p_n$，则$f$可由$A$导出. 以下设$f^{-1}(1)\neq\varnothing$. 对原子公式$p_i$约定

$$p_i^{\ 1}=p_i,\quad p_i^{\ 0}=\neg p_i. \tag{2.2.10}$$

令

$$A(p_1,\cdots,p_n)=\bigvee\{p_1^{x_1}\wedge\cdots\wedge p_n^{x_n}\mid(x_1,\cdots,x_n)\in f^{-1}(1)\}. \tag{2.2.11}$$

注意，当$x_i=1$时，把x_i代入$p_i^{x_i}$(即p_i)得 1. 当$x_i=0$时，把x_i代入$p_i^{x_i}$(即$\neg p_i$)仍得 1，所以分别用$x_1,\cdots,x_n$取代$p_1,\cdots,p_n$后$p_1^{x_1}\wedge\cdots\wedge p_n^{x_n}=1$. 从而由式(2.2.11)知当$(x_1,\cdots,x_n)\in f^{-1}(1)$时$\overline{A}(x_1,\cdots,x_n)=1$. 设$(y_1,\cdots,y_n)\notin f^{-1}(1)$，则对每个$(x_1,\cdots,x_n)\in f^{-1}(1)$，$(y_1,\cdots,y_n)\neq(x_1,\cdots,x_n)$. 那么有$i\leqslant n$使$y_i\neq x_i$. 这时若$x_i=1$，则$p_i^{x_i}=p_i$且$y_i=0$，所以把$y_i$代入$p_i^{x_i}$(即$p_i$)得 0. 若$x_i=0$，则$p_i^{x_i}=\neg p_i$且$y_i=1$，所以把$y_i$代入$p_i^{x_i}$(即$\neg p_i$)仍得 0. 可见分别以$y_1,\cdots,y_n$取代$p_1,\cdots,p_n$后$p_1^{x_1}\wedge\cdots\wedge p_n^{x_n}=0$. 因为$(x_1,\cdots,x_n)$是$f^{-1}(1)$中的任意元，所以由式(2.2.11)知$\overline{A}(y_1,\cdots,y_n)=0$. 总之，当$(x_1,\cdots,x_n)\in f^{-1}(1)$时$\overline{A}(x_1,\cdots,x_n)=1$，当$(y_1,\cdots,y_n)\notin f^{-1}(1)$时$\overline{A}(y_1,\cdots,y_n)=0$. 所以$f=\overline{A}$.

例 2.2.3 设 3 元 Boole 函数$f:\{0,1\}^3\to\{0,1\}$由表 2.2.2 给出.

表 2.2.2

x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

则$f^{-1}(1)=\{(0,0,1),(1,0,0),(1,1,0)\}$. 所以由式(2.2.10)得

$$A(p_1,p_2,p_3)=(\neg p_1\wedge\neg p_2\wedge p_3)\vee(p_1\wedge\neg p_2\wedge\neg p_3)\vee(p_1\wedge p_2\wedge\neg p_3). \tag{2.2.12}$$

所以

$$\begin{aligned}\overline{A}(x_1,x_2,x_3)&=(\neg x_1\wedge\neg x_2\wedge x_3)\vee(x_1\wedge\neg x_2\wedge\neg x_3)\vee(x_1\wedge x_2\wedge\neg x_3)\\&=\max\{(1-x_1)\wedge(1-x_2)\wedge x_3,x_1\wedge(1-x_2)\wedge(1-x_3),\end{aligned}$$

$$x_1 \wedge x_2 \wedge (1-x_3)\}.$$

读者容易验证 $f=\overline{A}$ 的确成立.

2.2.4 析取范式与合取范式

从式(2.2.1)与式(2.2.2)看出,析取运算 $\vee$ 与合取运算 $\wedge$ 都可以通过否定运算 $\neg$ 与蕴涵运算 $\rightarrow$ 来表达.从逻辑等价的观点看,蕴涵运算 $\rightarrow$ 也可以通过否定运算 $\neg$ 与析取运算 $\vee$ 或合取运算 $\wedge$ 来表达.即

$$A\rightarrow B\approx \neg A\vee B,\qquad A\rightarrow B\approx \neg(A\wedge \neg B). \tag{2.2.13}$$

式(2.2.13)是容易用赋值去验证的.因为公式在赋值后 $\vee$ 与 $\wedge$ 就分别成为简单的在0与1中取大与取小的运算,所以仅含 $\wedge$, $\vee$ 与 $\neg$ 的合式公式有其方便之处,就像式(2.2.12)那样,可以方便地看出何时 A 的赋值为1.

定义 2.2.7 设 $A(p_1,\cdots,p_n)\in F(S)$.则分别当 A 具有形式

$$(Q_{11}\wedge\cdots\wedge Q_{1n})\vee\cdots\vee(Q_{m1}\wedge\cdots\wedge Q_{mn}) \tag{2.2.14}$$

或

$$(Q_{11}\vee\cdots\vee Q_{1n})\wedge\cdots\wedge(Q_{m1}\vee\cdots\vee Q_{mn}) \tag{2.2.15}$$

时称 A 为**析取范式**或**合取范式**,这里 $Q_{ij}=p_j$ 或 $Q_{ij}=\neg p_j\,(j=1,\cdots,n;i=1,\cdots,m)$.

例 2.2.4 式(2.2.11)与式(2.2.12)中的 A 都是析取范式.$(\neg p_1\vee p_2\vee p_3)\wedge(p_1\vee p_2\vee \neg p_3)$ 则是合取范式.

注 2.2.4 由原子公式或其否定通过析(合)取连接词连接而成的公式叫**简单析(合)取式**.如 $p_1\vee p_2\vee\neg p_3$ 是简单析取式,$\neg p_1\wedge p_2$ 是简单合取式.简单析(合)取式既可看作是析取范式,又可看作是合取范式.此外,也可以把几个简单合取式的析取叫析取范式,这时每个简单合取式不必含有同样个数的原子命题,如 $(p_1\wedge\neg p_2)\vee(\neg p_1\wedge\neg p_2\wedge p_3)$.类似地,也可以把几个简单析取式的合取叫合取范式.

命题 2.2.6 每个不是矛盾式的公式都逻辑等价于一个析取范式.每个不是重言式的公式都逻辑等价于一个合取范式.

证明 由式(2.2.9)知两个公式逻辑等价的充要条件是它们导出相同的 Boole 函数,即

$$A\approx B\quad 当且仅当\quad \overline{A}=\overline{B}. \tag{2.2.16}$$

设 $B\in F(S)$,B 不是矛盾式,以 f 记 B 导出的 Boole 函数 $\overline{B}$,则 $f^{-1}(1)\neq\varnothing$.设 A 由式(2.2.11)确定,则 A 是析取范式.由命题2.2.5所证,$\overline{A}=f$,即 $\overline{A}=\overline{B}$,所以由式(2.2.16)知 $B\approx A$.如果 $B=B(p_1,\cdots,p_n)$ 不是重言式,则 $f^{-1}(0)\neq\varnothing$,对原子公式 p_i 约定

$$p_i^{\,1}=\neg p_i,\quad p_i^{\,0}=p_i,\quad i=1,\cdots,n. \tag{2.2.17}$$

令

$$A(p_1,\cdots,p_n)=\wedge\,\{p_1^{x_1}\vee\cdots\vee p_n^{x_n}\mid(x_1,\cdots,x_n)\in f^{-1}(0)\}, \tag{2.2.18}$$

则 A 是合取范式，易证 $\overline{A} = f$，从而 $B \approx A$.

注 2.2.5 (i) 如果按注 2.2.4 理解析取范式，则矛盾式也逻辑等价于一个析取范式 $\neg p_1 \wedge p_1$. 从而每个合式公式都逻辑等价于一个析取范式. 又，因为重言式逻辑等价于合取范式 $\neg p_1 \vee p_1$，所以命题 2.2.6 中的限制条件都可以去掉.

(ii) 命题 2.2.6 的证明是构造性的，即它不只证明了所说的结论，而且指出了如何去构作所需的析取范式或合取范式. 以析取范式为例，设 $B(p_1, \cdots, p_n)$ 不是矛盾式，那么先列出函数 $\overline{B}(x_1, \cdots, x_n) = \overline{B}(v(p_1), \cdots, v(p_n))$ 的取值表，再找出使函数值为 1 的各向量 $(x_1, \cdots, x_n)$，就可按式(2.2.11) 作出所求的析取范式了.

2.2.5 代入定理与 De Morgan 对偶律

命题 2.2.7(代入定理) 设 $A(p_1, \cdots, p_n) \in F(S)$.

(i) 若 $A(p_1, \cdots, p_n) \in \text{Tau}$，则对任意的 $B_1, \cdots, B_n \in F(S)$，$A(B_1, \cdots, B_n) \in \text{Tau}$.

(ii) 若 $B_i \approx C_i (i = 1, \cdots, n)$，则 $A(B_1, \cdots, B_n) \approx A(C_1, \cdots, C_n)$.

证明 (i) 设 $A(p_1, \cdots, p_n) \in \text{Tau}$，则 A 导出恒等于 1 的函数 $\overline{A}(x_1, \cdots, x_n)$. 设 $v \in \Omega$，则由 v 为同态知 $v(A(B_1, \cdots, B_n)) = \overline{A}(v(B_1), \cdots, v(B_n)) = 1$. 所以 $A(B_1, \cdots, B_n) \in \text{Tau}$.

(ii) 设 $v \in \Omega$，则 $v(A(B_1, \cdots, B_n)) = \overline{A}(v(B_1), \cdots, v(B_n)) = \overline{A}(v(C_1), \cdots, v(C_n)) = v(A(C_1, \cdots, C_n))$. 所以 $A(B_1, \cdots, B_n) \approx A(C_1, \cdots, C_n)$.

例 2.2.5 (i) 通过给 p_1, p_2 赋值直接看出 $p_1 \wedge p_2 \to p_1$ 是重言式，所以对任二公式 A 与 B，$A \wedge B \to A$ 是重言式.

(ii) 设 $A = p_1 \to p_2$，$B_1 = \neg(p_1 \vee p_2)$，$C_1 = \neg p_1 \wedge \neg p_2$，$B_2 = p_3 \to \neg p_4$，$C_2 = p_4 \to \neg p_3$. 容易验证 $B_1 \approx C_1$，$B_2 \approx C_2$，所以由命题 2.2.7(ii) 知 $\neg(p_1 \vee p_2) \to (p_3 \to \neg p_4) \approx \neg p_1 \wedge \neg p_2 \to (p_4 \to \neg p_3)$.

命题 2.2.8 设 $p_1, \cdots, p_n \in S$，则

$$\neg(\bigvee_{i=1}^{n} p_i) \approx \bigwedge_{i=1}^{n} \neg p_i, \quad \neg(\bigwedge_{i=1}^{n} p_i) \approx \bigvee_{i=1}^{n} \neg p_i. \tag{2.2.19}$$

证明 以第一式为例进行证明. 第一式左边公式对应的 Boole 函数为 $1 - \max\{x_1, \cdots, x_n\}$，右边公式对应的 Boole 函数为 $\min\{1 - x_1, \cdots, 1 - x_n\}$. 容易验证这两个函数相等，所以第一式成立. 同理可验证第二式成立.

推论 2.2.1 设 $A_1, \cdots, A_n \in F(S)$，则

$$\neg(\bigvee_{i=1}^{n} A_i) \approx \bigwedge_{i=1}^{n} \neg A_i, \quad \neg(\bigwedge_{i=1}^{n} A_i) \approx \bigvee_{i=1}^{n} \neg A_i. \tag{2.2.20}$$

证明 由式(2.2.19) 与命题 2.2.1(iii) 知 $\neg(\bigvee_{i=1}^{n} p_i) \leftrightarrow \bigwedge_{i=1}^{n} \neg p_i$ 为重言式，所以由命题 2.2.7(i) 知 $\neg(\bigvee_{i=1}^{n} A_i) \leftrightarrow \bigwedge_{i=1}^{n} \neg A_i$ 也是重言式. 这就证明了式(2.2.20) 中的第一式. 同理可证第二式.

式(2.2.20)叫做 **De Morgan 对偶律**. 事实上对偶律还可以进一步推广，如 $\neg(A \wedge (\neg B \vee C)) \approx \neg A \vee (B \wedge \neg C)$ 可由使用两次 De Morgan 对偶律并注意 $\neg\neg B \approx B$ 而得出. 再如 $\neg((A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg D \vee E)) \approx (\neg A \vee B \vee C) \wedge (D \wedge \neg E)$ 可由使用三次 De Morgan 对偶律而得出. 一般地，不难用数学归纳法证明下面的命题.

命题 2.2.9(一般的 De Morgan 对偶律) 设 A 是仅含连接词 $\neg$, $\vee$ 与 $\wedge$ 的合式公式，A^* 是从 A 中处处互换 $\vee$ 与 $\wedge$ 并把每个原子公式换成其否定式而得的合式公式，则 $A^* \approx \neg A$.

2.2.6 模型

因为 $F(S)$ 是由 S 生成的自由代数，所以每个赋值 v 由其在 S 上的限制 $v \mid S$ 所唯一决定. 因为 $v \mid S: S \to \{0,1\}$ 是二值映射，所以 $v \mid S$ 又由 $(v \mid S)^{-1}(1)$ 所唯一决定，因为只要知道 $v \mid S$ 在 S 中哪些命题变元处取值 1，那么它自然在其余变元处取值 0 了. 所以每个赋值 v 由它在 S 中那些取值 1 的原子命题之集所唯一决定，以下以 v_{S_0} 记在 S 的子集 S_0 中各原子公式处取值 1 且在其余原子公式处取值 0 的赋值.

定义 2.2.8 设 S 是全体原子公式之集.

(i) S 的每个子集 S_0 都叫做一个**模型**.

(ii) 设 $A \in F(S)$，如果 $v_{S_0}(A) = 1$，则称 S_0(或 v_{S_0})为 A **的模型**，记作 $S_0 \models A$.

(iii) 设 $M \subset F(S)$，如果 S_0 是 M 中每个公式的模型，则称 S_0(或 v_{S_0})为 M **的模型**，记作 $S_0 \models M$.

(iv) 设 $A \in F(S)$，$M \subset F(S)$，如果当 $S_0 \models M$ 时有 $S_0 \models A$，则称 M **语义蕴涵** A，记作 $M \models A$.

例 2.2.6 (i) 设 $q \in S_0 \subset S$，则 S_0 是 $p \to q$ 的模型($p \in S$). 可见公式 $p \to q$ 有许多不同的模型.

(ii) 矛盾式没有模型.

(iii) S 的每个子集都是重言式的模型，特别是 $F(S)$ 的每个子集都语义蕴涵重言式. 所以 A 是重言式也写为 $\models A$.

(iv) 设 $S_0 = \{q\}$，则 $S_0 \models q$, $S_0 \models p \to q$, $S_0 \models p \vee q$ $(p, q \in S)$.

(v) 设 $M = \{p, p \to q, q \to r\}$，则 $M \models r$ $(p, q, r \in S)$.

命题 2.2.10(紧致性定理) 设 M 是 $F(S)$ 的无穷子集. 如果 M 的每个有限子集都有模型，则 M 有模型.

证明 以 $\mathscr{P}_f(M)$ 表示 M 的有限子集构成的集. 对 M 中的每个公式 A，令 $\overline{A} = \{\alpha \in \mathscr{P}_f(M) \mid A \in \alpha\}$，则对 M 中任意有限个公式 $A_1, \cdots, A_n$ 而言，

$$\{A_1, \cdots, A_n\} \in \overline{A}_1 \cap \cdots \cap \overline{A}_n \neq \emptyset.$$

所以 $\mathscr{P}_f(M)$ 的子集族 $E = \{\overline{A} \mid A \in M\}$ 具有有限交非空的性质，从而存在 $\mathscr{P}_f(M)$ 上包含 E 的极大滤子 $\mathscr{D}$. 由假设知对每个 $\alpha \in \mathscr{P}_f(M)$，$\alpha$ 有模型. 所以有赋值 v_α 使得

$v_\alpha(A)=1$ 对每个 $A\in\alpha$ 都成立. 现在作 $F(S)$ 的赋值 v 如下:对 $F(S)$ 中的公式 B,令

$$v(B)=1 \quad \text{当且仅当} \quad \{\alpha\in\mathscr{P}_f(M)\mid v_\alpha(B)=1\}\in\mathscr{D}. \qquad (2.2.21)$$

先证明由式(2.2.21)定义的 v 确为 $F(S)$ 的赋值. 事实上:

(i) 设 $v(B)=1$,即 $\{\alpha\in\mathscr{P}_f(M)\mid v_\alpha(B)=1\}\in\mathscr{D}$,则因 $\{\beta\in\mathscr{P}_f(M)\mid v_\beta(B)=0\}$ 与 $\{\alpha\in\mathscr{P}_f(M)\mid v_\alpha(B)=1\}$ 不相交,所以由 $\mathscr{D}$ 为滤子以及 $\varnothing\notin\mathscr{D}$ 知

$$\{\beta\in\mathscr{P}_f(M)\mid v_\beta(\neg B)=1\}=\{\beta\in\mathscr{P}_f(M)\mid v_\beta(B)=0\}\notin\mathscr{D}.$$

从而由式(2.2.21)知 $v(\neg B)=0$. 反过来,设 $v(B)=0$,则 $\{\alpha\in\mathscr{P}_f(M)\mid v_\alpha(B)=1\}\notin\mathscr{D}$. 由 $\mathscr{D}$ 为 $\mathscr{P}_f(M)$ 上的极大滤子知

$$\begin{aligned}\mathscr{P}_f(M)-\{\alpha\in\mathscr{P}_f(M)\mid v_\alpha(B)=1\}&=\{\beta\in\mathscr{P}_f(M)\mid v_\beta(B)=0\}\\&=\{\beta\in\mathscr{P}_f(M)\mid v_\beta(\neg B)=1\}\in\mathscr{D}.\end{aligned}$$

所以由式(2.2.21)知 $v(\neg B)=1$. 这就证明了 $v(\neg B)=1-v(B)$.

(ii) 由式(2.2.21)以及 $\mathscr{D}$ 为极大滤子知

$$\begin{aligned}v(B\to C)=0 \quad &\text{当且仅当} \quad \{\alpha\in\mathscr{P}_f(M)\mid v_\alpha(B\to C)=1\}\notin\mathscr{D}\\
&\text{当且仅当} \quad \{\beta\in\mathscr{P}_f(M)\mid v_\beta(B\to C)=0\}\in\mathscr{D}\\
&\text{当且仅当} \quad \{\beta\in\mathscr{P}_f(M)\mid v_\beta(B)=1 \text{ 且 } v_\beta(C)=0\}\in\mathscr{D}\\
&\text{当且仅当} \quad \{\beta\in\mathscr{P}_f(M)\mid v_\beta(B)=1\}\cap\\
&\qquad\qquad\quad \{\gamma\in\mathscr{P}_f(M)\mid v_\gamma(\neg C)=1\}\in\mathscr{D}\\
&\text{当且仅当} \quad \{\beta\in\mathscr{P}_f(M)\mid v_\beta(B)=1\}\in\mathscr{D}\\
&\qquad\qquad\quad \text{且}\{\gamma\in\mathscr{P}_f(M)\mid v_\gamma(\neg C)=1\}\in\mathscr{D}\\
&\text{当且仅当} \quad v(B)=1 \text{ 且 } v(\neg C)=1\\
&\text{当且仅当} \quad v(B)=1 \text{ 且 } v(C)=0\\
&\text{当且仅当} \quad v(B)\to v(C)=0.\end{aligned}$$

所以 $v(B\to C)=v(B)\to v(C)$,从而 $v:F(S)\to\{0,1\}$ 是同态映射. 这就证明了 v 是赋值.

其次证明 M 有模型. 设 $A\in M$. 由 $\overline{A}=\{\alpha\in\mathscr{P}_f(M)\mid A\in\alpha\}\in E\subset\mathscr{D}$ 以及 $\mathscr{P}_f(M)$ 中的每个 α 均有模型且 A 属于每个 $\overline{A}$ 中的 α 知,若 $\alpha\in\overline{A}$,则 $v_\alpha(A)=1$. 所以由 $\overline{A}\in\mathscr{D}$ 以及 $\mathscr{D}$ 为上集知

$$\overline{A}\subset\{\beta\in\mathscr{P}_f(M)\mid v_\beta(A)=1\}\in\mathscr{D}.$$

从而由式(2.2.21)知 $v(A)=1$. 因为 A 是 M 中的任一公式,所以 v 就是 M 的模型.

习　题　2.2

1. 在 $F(S)$ 上定义二元关系 $\prec$ 为 $A\prec B$ 当且仅当 $A\to B\in\text{Tau}$,试证 $\prec$ 是 $F(S)$ 上的预序. 又,举例说明 $\prec$ 不是 $F(S)$ 上的偏序.

2. 试证以下各式为重言式:

(i) $A \to (\neg A \to B)$.

(ii) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$.

提示：先分别用 p_1, p_2, p_3 取代 A, B, C 证明(i) 与(ii) 是重言式，再用代入定理.

3. 试证：

(i) $(A \vee B \to C) \approx (A \to C) \wedge (B \to C)$.

(ii) $(A \wedge B \to C) \approx (A \to C) \vee (B \to C)$.

(iii) $(A \to (B \to C)) \approx (B \to (A \to C))$.

4. 求与公式$(\neg p_1 \to p_2) \to \neg p_3$ 逻辑等价的析取范式与合取范式.

5. 关于公式 A 中连接词的个数用数学归纳法证明一般的 De Morgan 对偶律.

6. 设 $M = \{\neg A \to B, A \to C, \neg C\}$，试证 M 语义蕴涵 B.

7. 设 $A \downarrow B$ 表示 $\neg(A \vee B)$. 用仅含连接词 $\downarrow$ 的公式去表达：

(i) $\neg A$.

(ii) $A \vee B$.

(iii) $A \to B$.

2.3 命题演算的语构理论

在上一节中我们借助于 $F(S)$ 之外的 Boole 代数$\{0,1\}$ 通过“裁判”(赋值) 打分的方法讨论公式的好与坏、公式间的一种等价关系(即逻辑等价关系) 以及基于这种等价关系的公式变形等. 在本节中我们不借助 $F(S)$ 以外的对象，完全在 $F(S)$ 自身中展开命题的演算理论，即命题演算的语构理论.

2.3.1 形式系统 L

定义 2.3.1 一个**形式系统**由以下 4 部分组成：

(i) 字符表：一般含可数多个符号.

(ii) 公式集：由某些有限的字符串组成之集，其成员叫公式.

(iii) 公理集：由某些公式组成之集.

(iv) 推理规则集：对每条推理规则而言，可以从有限多个公式推出一个公式.

定义 2.3.2 命题演算的形式系统 L 是一个特殊的形式系统.

(i) L 的字符表为：

$$\neg, \to, (,), p_1, p_2, p_3, \cdots$$

(ii) L 的公式集 $F(S)$ 由以下方法生成：

第一， $p_1, p_2, \cdots$ 都是公式.

第二， 若 A 与 B 是公式，则 $\neg A$ 与 $A \to B$ 也是公式.

第三， 再没有别种公式了.

(iii) L 的公理集包含以下三种形式的公式：

(L1) $A \to (B \to A)$

(L2) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

(L3) $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$.

(iv) $\boldsymbol{L}$ 中只有一条推理规则，即

MP：从 $A \to B$ 与 A 推得 B.

注 2.3.1 (i) 如在 2.2 节中所述，$\boldsymbol{L}$ 中的公式集 $F(S)$ 是由 $S = \{p_1, p_2, \cdots\}$ 生成的自由代数.

(ii) 也像 2.2 节中一样，设 $A, B \in F(S)$，则 $A \vee B$ 和 $A \wedge B$ 分别是 $\neg A \to B$ 与 $\neg(A \to \neg B)$ 的简写，$A \leftrightarrow B$ 是 $(A \to B) \wedge (B \to A)$ 的简写.

2.3.2 L 中的证明和定理

定义 2.3.3 $\boldsymbol{L}$ 中的一个**证明**是一个有限的公式序列 $A_1, \cdots, A_n$. 这里对每个 $A_i (i \leqslant n)$，A_i 是公理，或者存在 $j, k < i$ 使 A_i 是由 A_j 与 A_k 使用 MP 推得的结果. 上述证明叫做公式 A_n 的证明. A_n 叫做$\boldsymbol{L}$ 中的**定理**，记作 $\vdash_L A_n$，在不致混淆时也简记为 $\vdash A_n$. n 叫**证明的长度**.

注 2.3.2 (i) 若 A_i 是 A_j 与 A_k 运用 MP 推得的结果，则 $A_j = A_k \to A_i$，或 $A_k = A_j \to A_i$.

(ii) 设 $A_1, \cdots, A_n$ 是公式 A_n 的证明，$m \leqslant n$，则 $A_1, \cdots, A_m$ 是公式 A_m 的证明.

(iii) 在有了定理的概念之后，在定义 2.3.3 中把"A_i 是公理"换成"A_i 是定理"，其余不变，则所得结果仍为定理.

例 2.3.1 (i) 下面的 wff 序列（由上至下）是一个长度等于 3 的证明：

(1) $p_1 \to (p_2 \to p_1)$ (L1)

(2) $(p_1 \to (p_2 \to p_1)) \to ((p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_1))$ (L2)

(3) $(p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_1)$ (1)，(2)，MP

所以 $\vdash (p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_1)$.

(ii) 试证 $\vdash A \to A$.

证明 (1) $(A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$ (L2)

(2) $A \to ((A \to A) \to A)$ (L1)

(3) $(A \to (A \to A)) \to (A \to A)$ (1)，(2)，MP

(4) $A \to (A \to A)$ (L1)

(5) $A \to A$ (3)，(4)，MP

(iii) 试证 $\vdash \neg A \to (A \to B)$.

证明 (1) $\neg A \to (\neg B \to \neg A)$ (L1)

(2) $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$ (L3)

(3) $((\neg B \to \neg A) \to (A \to B)) \to (\neg A \to ((\neg B \to \neg A) \to (A \to B)))$ (L1)

(4) $\neg A \to ((\neg B \to \neg A) \to (A \to B))$ (2)，(3)，MP

(5) $(\neg A \to ((\neg B \to \neg A) \to (A \to B)))$

$\to ((\neg A \to (\neg B \to \neg A)) \to (\neg A \to (A \to B)))$ (L2)

(6) $(\neg A \to (\neg B \to \neg A)) \to (\neg A \to (A \to B))$ (4),(5),MP

(7) $\neg A \to (A \to B)$ (1),(6),MP

定义 2.3.4 设 $\Gamma \subset F(S)$. 从 Γ 出发的推演是一个有限的公式序列 $A_1, \cdots, A_n$,这里对每个 $A_i (i \leqslant n)$, A_i 是公理或 $A_i \in \Gamma$,或存在 $j, k < i$ 使 A_i 是由 A_j 与 A_k 使用MP推得的结果. A_n 叫做**Γ-结论**,或**Γ推出**A_n,记作 $\Gamma \vdash_L A_n$. 在不致混淆时也简记为 $\Gamma \vdash A_n$. n 叫**推演长度**.

显然,当 $\Gamma = \varnothing$ 时,Γ-结论就是定理,$\varnothing \vdash A$ 就是 $\vdash A$. 注意 $\Gamma \vdash A$ 与 $\vdash A$ 等都不是形式系统 L 中的符号,是我们为了叙述方便而引入的代用语.

例 2.3.2 试证 $\{A, B \to (A \to C)\} \vdash B \to C$.

证明 (1) A Γ

(2) $B \to (A \to C)$ Γ

(3) $A \to (B \to A)$ (L1)

(4) $B \to A$ (1),(3),MP

(5) $(B \to (A \to C)) \to ((B \to A) \to (B \to C))$ (L2)

(6) $(B \to A) \to (B \to C)$ (2),(5),MP

(7) $B \to C$ (4),(6),MP

2.3.3 演绎定理

演绎定理在命题演算中有重要的应用,其内容如下:

命题 2.3.1(演绎定理) 设 $\Gamma \subset F(S)$, $A, B \in F(S)$.

$$\text{如果 } \Gamma \cup \{A\} \vdash B, \quad \text{则 } \Gamma \vdash A \to B. \tag{2.3.1}$$

证明 用关于从 $\Gamma \cup \{A\}$ 到 B 的推演长度 n 作归纳证明. 当 $n = 1$ 时 B 或为公理,或属于 Γ,或 B 是 A.

(i) 设 B 是公理.

(1) B 公理

(2) $B \to (A \to B)$ (L1)

(3) $A \to B$ (1),(2),MP

所以 $\vdash A \to B$,从而 $\Gamma \vdash A \to B$.

(ii) $B \in \Gamma$.

(1) B Γ

(2) $B \to (A \to B)$ (L1)

(3) $A \to B$ (1),(2),MP

仍有 $\Gamma \vdash A \to B$.

(iii) $B = A$,因为前面已证 $\vdash A \to A$. 所以 $\Gamma \vdash A \to A$,即 $\Gamma \vdash A \to B$.

设从 $\Gamma \cup \{A\}$ 到 B 的推演长度小于 n 时式(2.3.1)成立($n > 1$). 现在从 $\Gamma \cup \{A\}$ 到 B 的推演长度等于 n. 以下证 $\Gamma \vdash A \to B$. 不妨设 B 不是公理,不属于 Γ 而且也不是 A. 则 B 是前面两项 C 与 $C \to B$ 运用 MP 而得的结果. 这时从 $\Gamma \cup \{A\}$ 到 C 和到 $C \to B$ 的推演长度均小于 n,所以由归纳假设知

$$\Gamma \vdash A \to C.$$
$$\Gamma \vdash A \to (C \to B).$$

这时从 Γ 到 $A \to B$ 的推演如下:

(1)
⋮ 从 Γ 到 $A \to C$ 的推演.
(k) $A \to C$

($k+1$)
⋮ 从 Γ 到 $A \to (C \to B)$ 的推演.
(l) $A \to (C \to B)$

($l+1$) $(A \to (C \to B)) \to ((A \to C) \to (A \to B))$ (L2)

($l+2$) $(A \to C) \to (A \to B)$ (l),($l+1$),MP

($l+3$) $A \to B$ (k),($l+2$),MP

所以 $\Gamma \vdash A \to B$

运用演绎定理往往可以使证明大为简化. 如,显然 $\{A\} \vdash A$ 成立,所以由演绎定理立即得出 $\vdash A \to A$,这比例 2.3.1(ii) 的证明容易得多.

命题 2.3.2(三段论规则) 设 $A,B,C \in F(S)$,则

$$\{A \to B, B \to C\} \vdash A \to C. \tag{2.3.2}$$

证明 运用两次 MP 容易验证

$$\{A \to B, B \to C\} \cup \{A\} \vdash C,$$

所以由演绎定理立即得出式(2.3.2).

三段论规则即 Hypothetical Syllogism,简称 HS.

推论 2.3.1 设 $\vdash A \to B$,且 $\vdash B \to C$,则 $\vdash A \to C$.

证明 由式(2.3.2)出发运用两次演绎定理得

$\vdash (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$.

再由 $\vdash A \to B$ 和 $\vdash B \to C$ 出发运用两次 MP 即得 $\vdash A \to C$.

使用HS也可简化证明. 如在例 2.3.1(iii) 的长度为 7 的推演中,由前两步运用 HS 就得到$\neg A \to (A \to B)$ 的长度为 3 的证明.

2.3.4 可靠性定理

在形式系统 $\boldsymbol{L}$ 中,我们不加证明(也无法证明)地公认(L1),(L2)和(L3)是公理,通俗地说,我们公认它们是形式系统 $\boldsymbol{L}$ 中的好公式. 然后我们从这些好公式出发运用MP可以推出各种形式的定理来,它们也是系统$\boldsymbol{L}$中的好公式. 我们问:如果

采用 2.2 节中裁判打分的方法来检验，它们还是不是好公式呢？即 **L** 中的定理是不是重言式呢？答案是肯定的.

命题 2.3.3（可靠性定理） **L** 中的定理都是重言式，即

$$\text{若}\ \vdash A,\text{则} \models A, A \in F(S). \tag{2.3.3}$$

证明 先证 **L** 中的公理都是重言式，以(L2)为例，以 E 记(L2)中的公式，任取 $v \in \Omega$，则由 v 为同态知

$$v(E) = (v(A) \to (v(B) \to v(C))) \to ((v(A) \to v(B)) \to (v(A) \to v(C))) \tag{2.3.4}$$

分别用 a,b,c 表示 $v(A),v(B),v(C)$，则式(2.3.4)可写为

$$v(E) = (a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c)). \tag{2.3.5}$$

由式(2.2.8)知，若 $c = 1$ 或 $a = 0$，则 $a \to c = 1$，$(a \to b) \to (a \to c) = 1$，从而 $v(E) = 1$. 设 $a = 1$ 且 $c = 0$，则 $a \to b = 1 \to b = b$，$a \to c = c$，$a \to (b \to c) = 1 \to (b \to c) = b \to c$. 这时由式(2.2.8)知

$$v(E) = (b \to c) \to (b \to c) = 1.$$

总之 $v(E) = 1$ 成立. 所以(L2)是重言式. 类似可证(L1)与(L3)也都是重言式.

由命题 2.2.3 给出的语义 MP 规则以及 **L** 中定理证明序列的结构立即看出 **L** 中的定理都是重言式，这就证明了式(2.3.3).

2.3.5 可证等价

由命题 2.2.1 看到，设 $A,B \in F(S)$，若 $A \to B$ 与 $B \to A$ 都是重言式，则 A 与 B 逻辑等价，即 $A \approx B$. 相应地我们有如下定义：

定义 2.3.5 设 $A,B \in F(S)$，如果 $A \to B$ 与 $B \to A$ 都是定理，则称 A 与 B **可证等价**，记作 $A \sim B$.

命题 2.3.4 设 $A,B \in F(S)$，若 $A \sim B$，则 $A \approx B$.

证明 设 $A \sim B$，则 $\vdash A \to B$ 且 $\vdash B \to A$. 由可靠性定理知 $A \to B$ 与 $B \to A$ 都是重言式，所以 $A \approx B$.

例 2.3.3 (i) 设 $A \in F(S)$，则 $\neg\neg A \sim A$.

证明 先证明

$$\{\neg\neg A\} \vdash A. \tag{2.3.6}$$

(1) $\neg\neg A$	假设
(2) $\neg\neg A \to (\neg\neg\neg\neg A \to \neg\neg A)$	(L1)
(3) $\neg\neg\neg\neg A \to \neg\neg A$	(1),(2),MP
(4) $(\neg\neg\neg\neg A \to \neg\neg A) \to (\neg A \to \neg\neg\neg A)$	(L3)
(5) $\neg A \to \neg\neg\neg A$	(3),(4),MP
(6) $(\neg A \to \neg\neg\neg A) \to (\neg\neg A \to A)$	(L3)
(7) $\neg\neg A \to A$	(5),(6),MP

(8) A　　(1),(7),MP

这就证明了式(2.3.6),再由演绎定理即得 $\vdash \neg\neg A \to A$. 在此式中以 $\neg A$ 代 A 得 $\vdash \neg\neg\neg A \to \neg A$. 又由(L3)得 $\vdash(\neg\neg\neg A \to \neg A) \to (A \to \neg\neg A)$,所以由 MP 得 $\vdash A \to \neg\neg A$. 这就证明了 $\neg\neg A \sim A$.

(ii) 设 $A,B \in F(S)$,则$(A \to B) \sim (\neg B \to \neg A)$.

证明　由(L3)立即得出 $\vdash(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$. 反过来,由演绎定理知只需证明

$$\{A \to B\} \vdash (\neg B \to \neg A). \tag{2.3.7}$$

(1) $A \to B$　　假设

(2) $\neg\neg A \to A$　　已证定理

(3) $\neg\neg A \to B$　　(1),(2),HS

(4) $B \to \neg\neg B$　　已证定理

(5) $\neg\neg A \to \neg\neg B$　　(3),(4),HS

(6) $(\neg\neg A \to \neg\neg B) \to (\neg B \to \neg A)$　　(L3)

(7) $\neg B \to \neg A$　　(5),(6),MP

这就证明了式(2.3.7). 所以$(A \to B) \sim (\neg B \to \neg A)$.

命题 2.3.5　可证等价关系 $\sim$ 是 $F(S)$ 上的同余关系.

证明　设 $A,B,C \in F(S)$. 由 $\vdash A \to A$ 知 $A \sim A$,所以 $\sim$ 是反身的. 由 $\sim$ 的定义知它也是对称的. 再设 $A \sim B, B \sim C$,则 $\vdash A \to B$, $\vdash B \to C$,从而由 HS 知 $\vdash A \to C$. 同理可证 $\vdash C \to A$,所以 $A \sim C$,即 $\sim$ 还是传递的,所以 $\sim$ 是 $F(S)$ 上的等价关系. 以下证明 $\sim$ 被否定运算 $\neg$ 与蕴涵运算 $\to$ 所保持.

首先,设 $A \sim B$,则 $\vdash A \to B$,所以由例 2.3.3(ii) 知 $\vdash \neg B \to \neg A$. 同理有 $\vdash \neg A \to \neg B$,所以 $\neg A \sim \neg B$.

其次,为证蕴涵运算 $\to$ 保持关系 $\sim$,先证明

$$\text{若 } G \sim H, \text{则}(E \to G) \sim (E \to H). \tag{2.3.8}$$

事实上,由 $G \sim H$ 得 $\vdash G \to H$. 又,由(L1)有 $\vdash(G \to H) \to (E \to (G \to H))$,所以由 MP 得 $\vdash E \to (G \to H)$. 再由(L2), $\vdash(E \to (G \to H)) \to ((E \to G) \to (E \to H))$,所以由 MP 得 $\vdash(E \to G) \to (E \to H)$. 同理可证 $\vdash(E \to H) \to (E \to G)$,所以式(2.3.8)成立.

现在设 $A \sim B, C \sim D$,则由式(2.3.8)知$(A \to C) \sim (A \to D)$. 又,由 $A \sim B$ 知 $\neg A \sim \neg B$,所以由式(2.3.8)得$(\neg D \to \neg A) \sim (\neg D \to \neg B)$. 再由例 2.3.3(ii) 得

$$(A \to D) \sim (\neg D \to \neg A) \sim (\neg D \to \neg B) \sim (B \to D).$$

由于 $\sim$ 具有传递性,所以$(A \to D) \sim (B \to D)$. 又,上面已证$(A \to C) \sim (A \to D)$,所以$(A \to C) \sim (B \to D)$.

2.3.6 代入定理

命题 2.3.6(代入定理) 设公式 A 中含有子公式 A_1,$A_1 \sim B_1$,在 A 中把一处或多处出现的 A_1 换成 B_1,记所得公式为 B,则 $A \sim B$.

证明 按 A 中所含连接词的个数进行归纳证明,但 A_1 中的连接词不计在内.若 A 中不含连接词,则 $A = A_1$,这时 $B = B_1$,所以由 $A_1 \sim B_1$ 即得 $A \sim B$.

设当 A 中所含连接词的个数小于 m 时结论成立,今 A 中含有 m 个连接词.

(i) 设 $A = \neg C$,这时 C 中含 $m-1$ 个连接词,且 $B = \neg D$,这里 D 是将 C 中一处或多处的 A_1 换为 B_1 而得的公式.由归纳假设知 $C \sim D$.所以 $\neg C \sim \neg D$.即,$A \sim B$ 仍成立.

(ii) 设 $A = C \to D$,这时 C 与 D 中均含少于 m 个连接词,且 $B = E \to F$,这里 E 和 F 分别是将 C 和 D 中的一处或多处的 A_1 换为 B_1 而得的公式.由归纳假设知 $C \sim E, D \sim F$,所以 $C \to D \sim E \to F$.即 $A \sim B$ 仍成立.

综上所述知命题 2.3.6 成立.

例 2.3.4 (i) $(A \to B) \vee (A \to C) \sim (A \to B \vee C)$,这里 $G \vee H$ 是 $\neg G \to H$ 的简写.

(ii) $(A \to B) \wedge (A \to C) \sim (A \to B \wedge C)$. (2.3.9)

(iii) $(B \to A) \wedge (C \to A) \sim B \vee C \to A$.

证明 (i) 不难证明(习题 2.3,3)

$$(A \to B) \sim (A \to (A \to B)).$$

$$(\neg C \to (A \to B)) \sim (A \to (\neg C \to B)).$$

$$(\neg H \to G) \sim (\neg G \to H).$$

所以由代入定理得

$$\begin{aligned} A \to B \vee C &= (A \to (\neg B \to C)) \sim (A \to (\neg C \to B)) \sim (\neg C \to (A \to B)) \\ &\sim (\neg C \to (A \to (A \to B))) \sim (\neg C \to (\neg (A \to B) \to \neg A)) \\ &\sim (\neg (A \to B) \to (\neg C \to \neg A)) \sim \neg (A \to B) \to (A \to C) \\ &= (A \to B) \vee (A \to C). \end{aligned}$$

(ii) 由例 2.3.1(iii) 易证

$$\vdash H \wedge G \to H, \quad \vdash H \wedge G \to G. \tag{2.3.10}$$

其次,可以证明(习题 2.3,4)

$$\vdash B \to (C \to B \wedge C). \tag{2.3.11}$$

由 MP 知以下二式显然成立:

$$\{A, A \to B, A \to C\} \vdash B, \quad \{A, A \to B, A \to C\} \vdash C. \tag{2.3.12}$$

由式(2.3.12) 和式(2.3.11) 得

$$\{A, A \to B, A \to C\} \vdash B \wedge C.$$

所以由演绎定理得

$$\{A \to B, A \to C\} \vdash A \to B \wedge C.$$

从而根据式(2.3.10)可得

$$\vdash (A \to B) \wedge (A \to C) \to (A \to B \wedge C). \tag{2.3.13}$$

反过来,可由$\{A \to B \wedge C\} \vdash A \to B$和$\{A \to B \wedge C\} \vdash A \to C$和式(2.3.11)推出

$$\vdash (A \to B \wedge C) \to (A \to B) \wedge (A \to C).$$

所以

$$(A \to B) \wedge (A \to C) \sim (A \to B \wedge C). \tag{2.3.14}$$

(iii) 注意$\neg(B \vee C) = \neg(\neg B \to C) \sim \neg(\neg B \to \neg\neg C) = \neg B \wedge \neg C$. 由(ii),$B \to A \sim \neg A \to \neg B$和$C \to A \sim \neg A \to \neg C$以及代入定理得

$$\begin{aligned}(B \to A) \wedge (C \to A) &\sim (\neg A \to \neg B) \wedge (\neg A \to \neg C) \\ &\sim \neg A \to \neg B \wedge \neg C \\ &\sim \neg A \to \neg(B \vee C) \sim B \vee C \to A.\end{aligned}$$

所以(iii)成立.

2.3.7 Lindenbaum 代数

由于$\sim$是$F(S)$上的同余关系,所以$F(S)$关于$\sim$作商后可得一与$F(S)$同种类型的代数,记为$[F]$,即$[F] = F(S)/\sim$.

命题 2.3.7 设$[F]$是$F(S)$关于可证等价关系$\sim$的商代数,则可在$[F]$引入偏序$\leqslant$和补运算$'$,使$([F], \leqslant, ')$成为 Boole 代数. 这个 Boole 代数叫做 **Lindenbaum 代数**.

证明 先在$[F]$中引入关系$\leqslant$. 设$A \in F(S)$,以$[A]$记A所在的同余类,规定

$$[A] \leqslant [B] \quad \text{当且仅当} \quad \vdash A \to B. \tag{2.3.15}$$

设$A_1 \in [A], B_1 \in [B]$,则$(A_1 \to B_1) \sim (A \to B)$,所以由式(2.3.15)定义的关系$\leqslant$与$[A]$,$[B]$中代表元的选择无关,因而是合理的. 首先,由$\vdash A \to A$知$[A] \leqslant [A]$,即$\leqslant$是反身的. 其次,设$[A] \leqslant [B]$且$[B] \leqslant [A]$,则$\vdash A \to B$且$\vdash B \to A$,从而$A \sim B$,可见$[A] = [B]$,即$\leqslant$是反对称的. 最后,设$[A] \leqslant [B]$且$[B] \leqslant [C]$,则$\vdash A \to B$且$\vdash B \to C$. 由 HS 得$\vdash A \to C$,所以$[A] \leqslant [C]$,从而$\leqslant$是传递的. 这表明$\leqslant$是$[F]$上的偏序关系.

设$[A], [B] \in [F]$. 由(L1)知$\vdash B \to (\neg A \to B)$,且不难证明$\vdash A \to (\neg A \to B)$,所以根据$\leqslant$的定义知$[B] \leqslant [\neg A \to B]$且$[A] \leqslant [\neg A \to B]$,所以$[\neg A \to B]$是$[A]$与$[B]$的上界. 设$[C]$是$[A]$与$[B]$的任一上界,则$\vdash A \to C$且$\vdash B \to C$. 由此得$\vdash (A \to C) \wedge (B \to C)$(习题 2.3,4). 所以由例 2.3.4(iii)得$\vdash A \vee B \to C$. 由式(2.3.15)知$[A \vee B] \leqslant [C]$. 这就证明了$[A \vee B]$是$[A]$与$[B]$的上确界. 类似可证$[A \wedge B]$是$[A]$与$[B]$的下确界. 即

$$[A] \vee [B] = [A \vee B], \quad [A] \wedge [B] = [A \wedge B]. \tag{2.3.16}$$

因此$([F], \leqslant)$是格. 设T是定理,则易证对每个$A \in F(S)$,$A \to T$都是定理,所以

由式(2.3.15)知$[T]$是$[F]$中的最大元1.类似可验证$[\neg T]$是$[F]$的最小元0.所以$([F], \leqslant)$是有界格.在$[F]$中定义补运算为

$$[A]' = [\neg A], \quad A \in F(S). \tag{2.3.17}$$

因为$\neg A \vee A = A \to A$是定理,$\neg A \wedge A = \neg(\neg A \to \neg A)$是矛盾式.所以由式(2.3.16)和式(2.3.17)得

$$[A]' \vee [A] = [\neg A \vee A] = 1,$$
$$[A]' \wedge [A] = [\neg A \wedge A] = 0, \quad A \in F(S). \tag{2.3.18}$$

以下只需证明分配律成立.

先证明

$$A \wedge (B \vee C) \sim (A \wedge B) \vee (A \wedge C), \quad A, B, C \in F(S). \tag{2.3.19}$$

事实上,由$\sim$是同余关系以及$\neg(B \vee C) \sim \neg B \wedge \neg C$和$(A \to \neg B \wedge \neg C) \sim (A \to \neg B) \wedge (A \to \neg C)$得

$$\begin{aligned} A \wedge (B \vee C) &= \neg(A \to \neg(B \vee C)) \sim \neg(A \to \neg B \wedge \neg C) \\ &\sim \neg((A \to \neg B) \wedge (A \to \neg C)) \sim \neg(A \to \neg B) \vee \neg(A \to \neg C) \\ &= (A \wedge B) \vee (A \wedge C). \end{aligned}$$

所以式(2.3.19)成立.

由式(2.3.19)与式(2.3.16)得

$$[A] \wedge ([B] \vee [C]) = ([A] \wedge [B]) \vee ([A] \wedge [C]). \tag{2.3.20}$$

即,在$[F]$中分配律成立,所以$([F], \leqslant, ')$是Boole代数.

定义 2.3.6 设$[F]$是Lindenbaum代数,定义映射$v: F(S) \to [F]$如下:

$$v(A) = [A], \quad A \in F(S). \tag{2.3.21}$$

称v为**典型映射**.

命题 2.3.8 典型映射是同态映射,称为**典型同态**,且

$$v(A) = 1 \quad 当且仅当 \quad \vdash A. \tag{2.3.22}$$

证明 由$[F]$的成员是$F(S)$关于可证等价关系的同余类知

$$v(\neg A) = [\neg A] = [A]', \quad v(A \to B) = [A \to B] = [A] \to [B].$$

所以v是同态.又,$v(A) = 1$,即$[A] = [T]$,这里T是$F(S)$中的定理,所以式(2.3.22)成立.

2.3.8 完备性定理

前面已证明的可靠性定理说在L中凡从公理出发运用MP规则推出来的定理都是重言式.反过来,重言式是不是都可以按以上方式形式化地推出来呢?下面的完备性定理肯定地回答了这一问题,从而表示了命题演算的语义理论与语构理论的和谐统一.

命题 2.3.9(完备性定理) L中的公式A是定理的充要条件是A是重言式,即

$$\vdash A \quad 当且仅当 \quad \models A, \quad A \in F(S). \tag{2.3.23}$$

证明 由可靠性定理知只需证明若$\models A$,则 $\vdash A$. 设$A = A(p_1, \cdots, p_n)$是重言式,则对任一赋值 $v \in \Omega, v(A) = 1$,即

$$\overline{A}(v(p_1), \cdots, v(p_n)) = 1. \tag{2.3.24}$$

式(2.3.24)是一个(扩充形式的)Boole等式,其中变元在Boole代数$\{0,1\}$中取值,即式(2.3.24)在Boole代数$\{0,1\}$中成立.由Boole代数的完备性定理和注1.3.3知式(2.3.24)在每个Boole代数中都成立.特别是当变元$v(p_1), \cdots, v(p_n)$在Lindenbaum代数$[F]$中取值时式(2.3.24)仍成立.现在设$v: F(S) \to [F]$是任一同态,则由命题2.2.4后面的说明和式(2.3.24)得

$$v(A) = \overline{A}(v(p_1), \cdots, v(p_n)) = 1. \tag{2.3.25}$$

特别取v为典型同态,则式(2.3.25)仍成立.所以由命题2.3.8知A为定理.

由式(2.3.23)容易证明下面命题成立:

命题 2.3.10 $F(S)$上的可证等价关系与逻辑等价关系是一致的,即

$$A \sim B \quad 当且仅当 \quad A \approx B, \quad A, B \in F(S). \tag{2.3.26}$$

命题 2.3.11(可判定性定理) 设$A \in F(S)$,则A是否为$\boldsymbol{L}$中的定理可以经过有限次的运算来判定.

证明 设$A = A(p_1, \cdots, p_n) \in F(S)$,则$A$是否为$\boldsymbol{L}$中的定理可由

$$v(A) = \overline{A}(v(p_1), \cdots, v(p_n)) = 1$$

是否对一切$(v(p_1), \cdots, v(p_n)) \in \{0,1\}^n$成立而定.因为$\{0,1\}^n$中只有$2^n$个元,而当$A$(从而$\overline{A}$)给定后,每个元$(x_1, \cdots, x_n)$代入$\overline{A}$求值也只需有限次运算,所以一共经过有限次运算就可判定A是否为$\boldsymbol{L}$中的定理.

例 2.3.5 (i) $E = ((A \to B) \to A) \to A$是否为$\boldsymbol{L}$中的定理?

解 任取$v \in \Omega$,分别以a与b记$v(A)$与$v(B)$,则$v(E) = ((a \to b) \to a) \to a$,若$a = 1$,则由式(2.2.8)知$v(E) = 1$.若$a = 0$,则$a \leqslant b$从而由式(2.2.8)知$a \to b = 1$,所以$v(E) = (1 \to 0) \to 0 = 0 \to 0 = 1$.所以$E$是$\boldsymbol{L}$中的定理.

(ii) $E = (A \wedge B \to C) \to (A \to C) \vee (B \to C)$是否为$\boldsymbol{L}$中的定理?

解 设$v \in \Omega$.若$v(C) = 1$,则$v(E) = 1$.若$v(C) = 0$,且$v(A)$与$v(B)$之一为0,则$v((A \to C) \vee (B \to C)) = 1$从而$v(E) = 1$.若$v(C) = 0$且$v(A) = v(B) = 1$,则$v(A \wedge B \to C) = 0$,从而仍有$v(E) = 1$.所以$E$是$\boldsymbol{L}$中的定理.

(iii) $E = (p \to q) \to (p \to (q \to r))$是否为$\boldsymbol{L}$中的定理?

解 取$v \in \Omega$使$v(r) = 0$且$v(p) = v(q) = 1$,则立即看出$v(E) = 0$,所以E不是$\boldsymbol{L}$中的定理.

注 2.3.3 由命题2.3.10知:

(i) 命题2.2.6也可表述为:每个不是矛盾式的公式都可证等价于一个析取范式,每个不是重言式的公式都可证等价于一个合取范式.

(ii) Lindenbaum 代数也可由 $F(S)$ 关于逻辑等价关系 $\approx$ 作商而得到.

(iii) De Morgan 对偶律式(2.2.19) 与式(2.2.20) 中的 $\approx$ 改为可证等价关系 $\sim$ 时仍成立.

2.3.9 系统 L 的完备性定理的又一简单代数证明

在上文中我们给出了系统 L 的完备性的基于 Boole 代数完备性的证明,鉴于 Boole 代数的完备性定理是 Boole 代数理论中最重要的定理之一,我们在第 1 章中给出了它的证明,并在上文中把它用于了命题逻辑系统 L 的完备性的证明. 其实,如果读者不关心 Boole 代数的完备性定理,我们还可以基于命题 1.3.5 给出系统 L 的完备性定理的更简单的代数证明.

先介绍 Boole 代数中素理想的一个性质.

引理 2.3.1 设 $B = (X, \leqslant, ')$ 是 Boole 代数,Δ 是 B 中的素理想,则:

(i) 对每个 $b \in B$,b 与 b' 有一个且仅有一个属于 Δ.

(ii) $a \to b \in \Delta$ 当且仅当 $a \notin \Delta$ 且 $b \in \Delta$.

证明 (i) 由 $b \wedge b' = 0 \in \Delta$ 和 Δ 为素理想知 $b \in \Delta$ 或 $b' \in \Delta$. 又,因为 $b \vee b' = 1 \notin \Delta$,所以 b 与 b' 不能都属于 Δ.

(ii) 注意在 Boole 代数中 $a \to b = a' \vee b$. 若 $a \notin \Delta$ 且 $b \in \Delta$,则 $a', b \in \Delta$,从而由 Δ 为理想知 $a \to b = a' \vee b \in \Delta$. 反之,设 $a \in \Delta$ 或 $b \notin \Delta$,则 $a' \notin \Delta$ 或 $b \notin \Delta$,从而由 Δ 为下集知 $a \to b = a' \vee b \notin \Delta$.

命题 2.3.12(完备性定理) 系统 L 中的公式 A 是定理的充要条件是 A 是重言式,即式(2.3.23) 成立.

证明 由可靠性定理知,只需证明若 A 不是定理则 A 不是重言式. 由命题 2.3.7,Lindenbaum 代数 $[F]$ 是 Boole 代数. 如果 A 不是定理,则 $[\neg A] \neq 0$,由命题 1.3.5,$[F]$ 中有素理想 Δ 使 $[\neg A] \notin \Delta$. 作 $F(S)$ 的赋值 v 如下:对 $F(S)$ 中任一公式 B,$v(B) = 0$ 当且仅当 $[B] \in \Delta$. 则由引理 2.3.1 易证:

(i) $v(B) = 0$ 当且仅当 $v(\neg B) = 1$.

(ii) $v(B \to C) = 0$ 当且仅当 $[B \to C] = [B] \to [C] \in \Delta$ 当且仅当 $v(B) \to v(C) = 0$.

从而 $v: F(S) \to \{0,1\}$ 是赋值. 这时由 $v(\neg A) = 1$ 知 $v(A) = 0$. 所以 A 不是重言式.

2.3.10 系统 L 的完备性的逻辑证明

在前两节中我们给出了系统 L 的完备性的两种代数证明,但均涉及 Boole 代数中的理想理论. 不熟悉 Boole 代数中滤子与理想理论的读者可以在本节中看到系统 L 的完备性定理的逻辑证明,这种证明方法是大多数逻辑学论著中所采用的传统的证明方法,不涉及 Boole 代数理论.

先证明 L 中的一个定理:

$$\vdash (\neg A \to A) \to A, \quad A \in F(S). \tag{2.3.27}$$

证明 (1) $\neg A \to A$ 假设

(2) $\neg A \to (\neg\neg(\neg A \to A) \to \neg A)$ (L1)

(3) $(\neg\neg(\neg A \to A) \to \neg A) \to (A \to \neg(\neg A \to A))$ (L3)

(4) $\neg A \to (A \to \neg(\neg A \to A))$ (2),(3),HS

(5) $(\neg A \to (A \to \neg(\neg A \to A))) \to ((\neg A \to A) \to (\neg A \to \neg(\neg A \to A)))$ (L2)

(6) $(\neg A \to A) \to (\neg A \to \neg(\neg A \to A))$ (4),(5),MP

(7) $\neg A \to \neg(\neg A \to A)$ (1),(6),MP

(8) $(\neg A \to \neg(\neg A \to A)) \to ((\neg A \to A) \to A)$ (L3)

(9) $(\neg A \to A) \to A$ (7),(8),MP

(10) A (1),(8),MP

再由演绎定理即得式(2.3.27).

以下是系统 L 的完备性的传统证明.

定义 2.3.7 (i) 设 L^* 是在系统 L 的基础上改变 L 的公理或给 L 添加新公理而得的系统,使得凡 L 中的定理都是 L^* 中的定理,则称 L^* 为 L 的**扩张**.

(ii) L 的扩张 L^* 叫**相容的**,如果 $F(S)$ 中不存在公式 A 使 A 与 $\neg A$ 都是 L^* 中的定理. 否则称 L^* 为**不相容**的系统.

注 2.3.4 (i) 系统 L 当然是其自身的扩张.

(ii) 由 L 的可靠性定理知 $\vdash_L A$ 与 $\vdash_L \neg A$ 不可能同时成立,所以 L 是相容的.

(iii) 设 L^* 是 L 的扩张,如果 L^* 不相容,即,$F(S)$ 中有公式 A 使 $\vdash_{L^*} A$ 与 $\vdash_{L^*} \neg A$ 均成立,则对 $F(S)$ 中任一公式 B,由 $\vdash_{L^*} A \to (\neg A \to B)$ 出发运用两次 MP 可得出 $\vdash_{L^*} B$,即,每个公式都是 L^* 中的定理. 反过来,如果 $F(S)$ 中每个公式都是 L^* 中的定理,则 $\vdash_{L^*} A$ 与 $\vdash_{L^*} \neg A$ 都成立,从而 L^* 不相容. 可见 L^* 相容的充要条件是 $F(S)$ 中有公式不是 L^* 中的定理.

定义 2.3.8 系统 L 的扩张 S 叫**完全的**,如果对 $F(S)$ 中每个公式 A,$\vdash_S A$ 与 $\vdash_S \neg A$ 中至少有一个成立.

系统 L 远非完全的,因为,比如,任取原子公式,则 p 与 $\neg p$ 都不是 L 中的定理. 又显然不相容的系统是完全的. 但这种系统没有什么用处. 我们关心的是:是否存在 L 的相容的完全扩张?回答是肯定的.

命题 2.3.13 相容系统 L^* 有一个相容的完全扩张.

证明 设相容系统 L^* 不完全,则 $F(S)$ 中有公式 A 不是 L^* 中的定理,把 $\neg A$ 添加为 L^* 的新公理而得 L^* 的扩张 L^{**},则 L^{**} 仍是相容的. 事实上,如果 L^{**} 不相容,则由注 2.3.4(iii) 知 A 是 L^{**} 中的定理. 但 L^{**} 是在 L^* 中添加 $\neg A$ 为公理而得,所以有 $\neg A \vdash_{L^*} A$. 由演绎定理得 $\vdash_{L^*} \neg A \to A$. 与由式(2.3.27) 得 $\vdash_{L^*} A$. 相矛盾!

设 $\boldsymbol{L}^* = \boldsymbol{L}_0 \subset \boldsymbol{L}_1 \subset \cdots \subset \boldsymbol{L}_n \subset \cdots$ 是 $\boldsymbol{L}^*$ 的相容扩张按包含序构成的链，则易证 $\bigcup_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{L}_n$ 也是 $\boldsymbol{L}^*$ 的相容扩张，它是各 $\boldsymbol{L}_n$ 组成之集的上界. 由 Zorn 引理，$\boldsymbol{L}^*$ 有一极大相容扩张 $\boldsymbol{S}$. $\boldsymbol{S}$ 就是 $\boldsymbol{L}^*$ 的完全的相容扩张. 事实上，若有 $A \in F(S)$ 使 $\vdash_S A$ 与 $\vdash_S \neg A$ 均不成立. 则将 $\neg A$ 添加为新公理即得 $\boldsymbol{S}$ 的相容扩张 $\boldsymbol{S}^*$，且 $\boldsymbol{S}^*$ 比 $\boldsymbol{S}$ 多了一个定理 $\neg A$. 这与 $\boldsymbol{S}$ 的极大性相矛盾！

命题 2.3.14 设 $\boldsymbol{L}^*$ 是 $\boldsymbol{L}$ 的相容扩张，则 $F(S)$ 有赋值 v 使对 $\boldsymbol{L}^*$ 中的每个定理 A 均有 $v(A) = 1$.

证明 取 $\boldsymbol{L}^*$ 的完全的相容扩张 $\boldsymbol{S}$，定义 $v: F(S) \to \{0,1\}$ 如下：

$$v(A) = 1 \quad \text{当且仅当} \quad \vdash_S A,\ A \in F(S). \tag{2.3.28}$$

则

(i) 由 $\boldsymbol{S}$ 是 $\boldsymbol{L}^*$ 的相容的完全扩张和式(2.3.28)知

$$v(A) = 1 \quad \text{当且仅当} \quad v(\neg A) = 0.$$

(ii) 设 $v(A \to B) = 1$，则 $\vdash_S A \to B$. 这时若 $v(A) \to v(B) = 0$，则 $v(A) = 1$ 且 $v(B) = 0$，从而 $\vdash_S A$ 且 $\vdash_S B$ 不成立. 但由 $\vdash_S A \to B$ 与 $\vdash_S A$ 可得 $\vdash_S B$. 矛盾！所以 $v(A) \to v(B) = 1$. 反过来，设 $v(A) \to v(B) = 1$，则 $v(A) = 0$ 或 $v(B) = 1$. 由式(2.3.28)以及 $\boldsymbol{S}$ 的完全性得 $\vdash_S \neg A$ 或 $\vdash_S B$. 由此得 $\vdash_S A \to B$，从而 $v(A \to B) = 1$. 即，$v(A \to B) = v(A) \to v(B)$ 成立.

由(i)与(ii)知 v 为 $F(S)$ 的赋值. 若 A 是 $\boldsymbol{L}^*$ 中的定理，则 $\vdash_S A$，从而由式(2.3.28)得 $v(A) = 1$.

命题 2.3.15(完备性定理) 系统 $\boldsymbol{L}$ 中的公式 A 是定理的充要条件是 A 是重言式，即式(2.3.28)成立.

证明 只需证若 A 是重言式，则 A 是 $\boldsymbol{L}$ 中的定理. 事实上，若 A 不是 $\boldsymbol{L}$ 中的定理，把 $\neg A$ 添加为公理而得一相容系统 $\boldsymbol{L}^*$. 由命题 2.3.14，$F(S)$ 有赋值 v 使 $v(\neg A) = 1$. 这与 A 是重言式相矛盾！

习 题 2.3

1. 试证演绎定理的逆定理成立，即若 $\Gamma \vdash A \to B$，则 $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$.
2. 试证：

   (i) $\vdash A \to (B \to (A \to B))$.

   (ii) $\vdash (B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$.

   (iii) $\vdash (A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$.

   (iv) $\vdash (A \to (A \to B)) \to (A \to B)$.
3. 试证：

   (i) $(A \to (B \to C)) \sim (B \to (A \to C))$.

   (ii) $(A \to (A \to B)) \sim (A \to B)$.

(iii) $(A \to \neg B) \sim (B \to \neg A)$ (可利用例 2.3.3(i)).

(iv) $(\neg A \to B) \sim (\neg B \to A)$ (同上).

(v) $A \wedge B \sim B \wedge A$, $A \vee B \sim B \vee A$.

4. 试证:

$$\vdash A \to (B \to A \wedge B).$$

由此证明若 A 与 B 都是定理,则 $A \wedge B$ 也是定理.

5. 证明:

(i) $\neg(A \vee B) \sim \neg A \wedge \neg B$.

(ii) $\neg(A \wedge B) \sim \neg A \vee \neg B$.

6. 利用 L 的完备性定理证明以下各式成立:

(i) $\vdash (\neg A \to A) \to A$.

(ii) $\vdash \neg(A \to B) \to (B \to A)$.

(iii) $(A \vee B \to C) \sim (A \to C) \wedge (B \to C)$.

(iv) $(A \wedge B \to C) \sim (A \to C) \vee (B \to C)$.

7. 设 $\Gamma \subset F(S)$, $A \in F(S)$, 且 $\Gamma \vdash A$. 试证 $\Gamma \models A$.

8. 设 $\Gamma \subset F(S)$, 在 $F(S)$ 上定义二元关系 $\sim_\Gamma$ 如下:

$$A \sim_\Gamma B \quad \text{当且仅当} \quad \Gamma \vdash (A \to B) \wedge (B \to A). \tag{2.3.29}$$

(i) 试证 $\sim_\Gamma$ 是 $F(S)$ 上的等价关系.

(ii) 试证 $\sim_\Gamma$ 是 $F(S)$ 上的同余关系.

(iii) 以 $[F]_\Gamma$ 记商代数 $F(S)/\sim_\Gamma$, 以 $\bar{A}$ 记 $[F]_\Gamma$ 中包含 A 的同余类. 规定

$$\bar{A} \leqslant_\Gamma \bar{B} \quad \text{当且仅当} \quad \Gamma \vdash A \to B, \quad A, B \in F(S). \tag{2.3.30}$$

试证 $\leqslant_\Gamma$ 是 $[F]_\Gamma$ 上的偏序, 且设 $A \in \Gamma$ 或 A 是定理, 则 $\bar{A}$ 是 $[F]_\Gamma$ 中的最大元 1_Γ, $\overline{\neg A}$ 是 $[F]_\Gamma$ 中的最小元 0_Γ.

(iv) 试证在 $[F]_\Gamma$ 中, $\overline{A \vee B}$ 与 $\overline{A \wedge B}$ 分别是 $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 的上确界与下确界, 即

$$\bar{A} \vee \bar{B} = \overline{A \vee B}, \quad \bar{A} \wedge \bar{B} = \overline{A \wedge B}. \tag{2.3.31}$$

并从而证明 $([F]_\Gamma, \leqslant_\Gamma, ')$ 是 Boole 代数, 这里 $\bar{A}' = \overline{\neg A}$ $(A \in F(S))$.

9. 设 $\Gamma \subset F(S)$, Γ 有限, $A \in F(S)$. 试证:

$$\Gamma \vdash A \quad \text{当且仅当} \quad \Gamma \models A. \tag{2.3.32}$$

(提示 利用完备性定理)

第 3 章　一阶谓词演算的语义理论

在第 2 章中我们比较系统地研究了命题演算理论，在等价的意义下（即在既逻辑等价又可证等价的双重意义下）揭示了许多具有不同形式的命题之间的本质联系. 比如，不论 A 与 B 代表什么命题，$A \to B$ 总和它的逆否命题 $\neg B \to \neg A$ 等价，也和具有析取形式的命题 $\neg A \lor B$ 等价. 又，$\neg(A \lor B)$ 总和 $\neg A \land \neg B$ 等价. 再设 C 是任一命题，则 $A \lor B \to C$ 与 $A \to C$ 与 $B \to C$ 的合取等价，等等. 这些都是十分有用的结果，有助于我们去认识或许被不同的外形所掩藏起来的规律. 但另一方面，命题演算理论的应用又有相当大的局限性. 比如，像下面这种十分自然且完全正确的推理就超出了命题演算理论的范围：

(i) 每个人都会死的.

(ii) 欧拉是人.

(iii) 所以欧拉会死的.

或许有的读者会想，分别用 A，B 和 C 表示“人”，“会死”和“欧拉”，那么以上的(i)、(ii)和(iii)就可形式化地写成：

(i)′ $A \to B$.

(ii)′ $C \to A$.

(iii)′ 所以 $C \to B$.

这里(iii)′是由(i)′与(ii)′运用 HS 而得的. 但这是错误的，因为以上 A，B 和 C 都不是命题，A 和 C 仅仅是命题中的主语，而 B 只是命题中的谓语. 所以推理(i)～(iii)虽然正确，但已超出了命题演算理论的范围. 它属于本章和下一章要讲的谓词演算的内容. 如果我们用大写字母表示谓语，把主语用小写字母放在谓语后面的括号中，即用 $P(x)$ 表示“x 具有性质 P”，并用符号 $\forall$ 表示“对于每一个”，则(i)～(iii)可以形式化地写为：

(i)″ $(\forall x)(M(x) \to D(x))$.

(ii)″ $M(u)$.

(iii)″ 所以 $D(u)$.

这里 M 和 D 分别表示“是人”和“会死”这两个性质，u 表示欧拉. 以后会看到这是谓词演算中的正确推理. 但对命题演算而言，$M(u)$ 与 $D(u)$ 都是不可再分的原子命题，而 $(\forall x)(M(x) \to D(x))$ 是一个复合命题. 如果分别用 B，C 和 A 表示这三个命题，则以上的(i)″～(iii)″就成为：A，B，所以 C.

这显然是命题演算所无法推演的论断. 因此也可见命题演算语言表达能力的不足以及相应的推理能力的局限. 在本章和下一章中我们学习最基本的一阶谓词

演算理论，即一阶逻辑理论. 本章中先讲解一阶逻辑的语义理论，下一章再把它完全形式化，研究其语构理论.

3.1 一阶语言

3.1.1 一阶语言$\mathscr{L}$和$\mathscr{L}$中的合式公式

在第 2 章讲过，一般的形式系统由 4 个部分组成，其中第一部分是符号表. 有了这个符号表才可以制作出合式公式来，我们称其为语言. 在本书中一阶谓词演算系统使用的语言叫一阶语言. 确切地说，我们有以下定义：

定义 3.1.1　一阶语言由以下符号组成：

(i) 变元符号：$x_1, x_2, \cdots$.

(ii) 个体常元符号：$a_1, a_2, \cdots$.

(iii) 谓词符号：

1 元谓词符号：$A_1^1, A_2^1, \cdots$.

2 元谓词符号：$A_1^2, A_2^2, \cdots$.

……

(iv) 函数符号：

1 元函数符号：$f_1^1, f_2^1, \cdots$.

2 元函数符号：$f_1^2, f_2^2, \cdots$.

……

(v) 连接词：$\neg, \rightarrow$.

(vi) 标点符号：(，)，'.

(vii) 全称量词符号：$\forall$.

注 3.1.1　(i) 像在 L 中一样，这里只有两个连接词$\neg$与$\rightarrow$，下面在有了关于一阶语言中的合式公式概念以后，对两个公式 A 与 B，还可用 $A \vee B$ 简记$\neg A \rightarrow B$，用 $A \wedge B$ 简记$\neg(A \rightarrow \neg B)$.

(ii) 有些书中不把函数符号 f_i^n 列入一阶语言之中，这是因为每个 n 元函数都可看作是一个特殊的 $n+1$ 元关系.

(iii) 定义 3.1.1 中的一阶语言中含有可数多个个体常元，可数多个函数符号与谓词符号. 但往往不需要这么多的上述各符号.

定义 3.1.2　一阶语言$\mathscr{L}$由以下符号组成：

(i) 变元符号：$x_1, x_2, \cdots$

(ii) 某些个体常元 a_i.

(iii) 某些谓词符号 A_i^n.

(iv) 某些函数符号 f_i^n.

(v) 连接词:¬与→.

(vi) 标点符号:(,),'.

(vii) 量词符号:∀.

例 3.1.1　(i) 描述自然数的一阶语言 $\mathscr{L}_N$.

$\mathscr{L}_N$ 只有一个个体常元 a_1,用它表示最小的自然数 0. $\mathscr{L}_N$ 中只有一个 2 元谓词符号 A_1^2,用它表示"=". $\mathscr{L}_N$ 中有三个函数符号 f_1^1, f_1^2 和 f_2^2. 用 f_1^1 表示后继函数,用 f_1^2 表示加法函数,用 f_2^2 表示乘法函数. 这时由 $\mathscr{L}_N$ 中的符号构成的表达式 $A_1^2(f_1^2(x_1, x_2), f_2^2(x_1, x_2))$ 就可以解释为"$x_1 + x_2 = x_1 \times x_2$". 再如 $\mathscr{L}_N$ 中的表达式 $(\forall x_1)\neg A_1^2(x_1, f_1^1(x_1))$ 就可解释为"每个自然数 x_1 都不等于其后继",也即"$(\forall x)(x \neq x+1)$".

(ii) 描述群的一阶语言 $\mathscr{L}_G$.

$\mathscr{L}_G$ 中有一个个体常元 a_1,用它可表示群的单位元,有一个 2 元谓词符号 A_1^2,用它表示相等关系"=",有两个函数符号 f_1^1 与 f_1^2,用 f_1^1 表示逆运算,用 f_1^2 表示群的乘法运算. 这时 $\mathscr{L}_G$ 中的表达式 $A_1^2(f_1^2(x_1, f_1^1(x_1)), a_1)$ 可解释为"$x \cdot x^{-1} = e$",这里 e 是群的单位元. 又如

$$A_1^2(f_1^2(f_1^2(x_1, x_2), x_3), f_1^2(x_1, f_1^2(x_2, x_3))) \tag{3.1.1}$$

表示群的乘法结合律"$(x_1x_2)x_3 = x_1(x_2x_3)$".

有了一阶语言的符号就可以引入该语言中的合式公式的概念,它比 **L** 中的公式概念要复杂许多. 这得先从公式的组成部分讲起.

定义 3.1.3　设 $\mathscr{L}$ 是一阶语言,则 $\mathscr{L}$ 中的**项**(term)定义如下:

(i) 变元和 $\mathscr{L}$ 中的个体常元是项.

(ii) 设 f_i^n 是 $\mathscr{L}$ 中的 n 元函数符号,$t_1, \cdots, t_n$ 是项,则 $f_i^n(t_1, \cdots, t_n)$ 是项.

(iii) $\mathscr{L}$ 中的项均由(i)与(ii)的方式生成,其全体之集记作 $\mathscr{T}$.

例如,在 $\mathscr{L}_G$ 中,x_1, x_2, x_3 与 a_1 都是项,$f_1^1(x_1)$, $f_1^2(x_1, f_1^1(x_1))$ 和 $f_1^2(x_1, a_1)$ 等也都是项,它们分别表示 x_1^{-1}, $x_1x_1^{-1}$ 和 x_1e 等. 一般来说,项是表示对象的. 项可以用来表示句子的主语. 但由于没有谓词,项不能表示命题.

定义 3.1.4　设 $\mathscr{L}$ 是一阶语言,A_j^k 是 $\mathscr{L}$ 中的 k 元谓词,$t_1, \cdots, t_k$ 是 $\mathscr{L}$ 中的项,则称 $A_j^k(t_1, \cdots, t_k)$ 为 $\mathscr{L}$ 中的**原子公式**(atomic formula). 又,$\mathscr{L}$ 中的**合式公式**(well formed formula)定义如下:

(i) 原子公式是合式公式.

(ii) 如果 A 与 B 是合式公式,则 $\neg A$, $A \to B$ 与 $(\forall x_i)A$ 也都是合式公式.

(iii) 合式公式均由(i)与(ii)的方式生成.

合式公式也简称为**公式**. 以后将用 $\mathscr{F}_{\mathscr{L}}$ 表示全体公式之集. 显然,语言 $\mathscr{L}$ 中的函

数符号或谓词符号越多，$\mathscr{F}_{\mathscr{L}}$ 中的公式也越多. 但它总是可数集. 在不必要明确 $\mathscr{L}$ 时，我们把 $\mathscr{F}_{\mathscr{L}}$ 简写为 $\mathscr{F}$. 以下经常这样做. 又，$\mathscr{F}_{\mathscr{L}}$ 中的公式也叫 $\mathscr{L}$ 中的公式.

例如，在 $\mathscr{L}_G$ 中，$A_1^2(f_1^2(x_1,f_1^1(x_1)),a_1)$ 是原子公式，它被解释为"$x_1x_1^{-1}=e$". 式(3.1.1)中的表达式也是原子公式，它被解释为乘法结合律. 再如在 $\mathscr{L}_N$ 中，$(\forall x_1)(\forall x_2)(A_1^2(x_1,x_2)\to A_1^2(f_1^1(x_1),f_1^1(x_2))$ 也是公式，但它不是原子公式. 它被解释为"对任二自然数 x 与 y，若 $x=y$，则$x+1=y+1$". 我们看到，合式公式是表示命题的，但在谓词演算中，我们不再像在命题演算中那样，把合式公式叫命题了.

注 3.1.2 (i) 我们常说一个公式表示某某命题或被解释为某某命题，而不说公式就是一个命题. 这是因为公式只是一串抽象符号的组合而已. 一个形式语言 $\mathscr{L}$ 可以有各种不同的解释，比如，群的语言也可以用来解释带单位的半群或一般的半群，这时只需将一元函数符号 f_1^1 或个体常元符号 a_1 闲置不用即可. 又如，解释自然数的语言也可用来解释格，这时二元函数符号 f_1^2 与 f_2^2 不再代表加法与乘法，而是分别代表两个元的上确界与下确界运算了. 这时式(3.1.1)又表示的是$(x_1\vee x_2)\vee x_3=x_1\vee(x_2\vee x_3)$了. 所以以后我们常将 $\mathscr{L}_N$ 和 $\mathscr{L}_G$ 等都写成一般化的一阶语言 $\mathscr{L}$.

(ii) 细心的读者可能已经注意到，在第 1 章中自然数是从 1 算起的，本章中用自然数作变元符号 x_i 的下标时也是从 1 算起的. 但当用逻辑的方式定义自然数集 **N** 时，自然数却从 0 算起(见例 3.1.1(i)). 因为自然数被当作标号使用时从 1 开始已经是长期以来的习惯，也是绝大多数数学书籍中的共同用法，本书也不打算改变. 但在严格地用公理集合论的方法表述自然集时，自然数从 0 算起(那时用 $\varnothing$ 表示第一个自然数 0，用$\{\varnothing\}$表示自然数 1，用$\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$表示自然数 2 等). 以后在涉及自然数集 **N** 时，我们将根据情况明确其含义，以不致混淆为原则.

(iii) 设 $A\in\mathscr{F}$，以下用符号$(\exists x_i)A$ 表示$\neg(\forall x_i)\neg A$.

3.1.2 约束变元与自由变元

定义 3.1.5 在公式$(\forall x_i)A$ 中，A 叫做$\forall x_i$ 的**辖域**. 这时公式 A 中若有变元 x_i，则该 x_i 叫**约束变元**. 又，$\forall x_i$ 中的 x_i 也叫约束变元. 不是约束变元的变元叫**自由变元**.

例 3.1.2 (i) 在公式$(\forall x_1)A_1^1(x_2)$中，$A_1^1(x_2)$是 $\forall x_1$ 的辖域，x_1 是约束变元，x_2 是自由变元.

(ii) 在公式$(\forall x_1)(\forall x_2)(A_1^2(x_1,x_2)\to A_1^1(x_2))$中，$\forall x_1$ 的辖域是$(\forall x_2)(A_1^2(x_1,x_2)\to A_1^1(x_2))$，$\forall x_2$ 的辖域是 $A_1^2(x_1,x_2)\to A_1^1(x_2))$. x_1 与 x_2 都是约束变元.

(iii) 在公式$(\forall x_1)(A_1^2(x_1,x_2)\to(\forall x_2)A_1^1(x_2))$中，$\forall x_1$ 的辖域是 $A_1^2(x_1,x_2)\to(\forall x_2)A_1^1(x_2)$，$\forall x_2$ 的辖域是 $A_1^1(x_2)$. 又，x_1 与 x_2 都是约束变元，其中 x_1 约束出现 2 次，x_2 约束出现 2 次，同时自由出现 1 次. 注意，x_2 虽曾自由出现 1 次，但从它

在整个公式中的地位看，x_2 不是自由变元. 我们约定，以下说到 x_i 是公式 A 中的自由变元时指 x_i 从未在 A 中约束出现过，称 A 中不是自由变元的变元为约束变元.

定义 3.1.6 设 $A(x_i)$是含有变元 x_i 的公式，t 是一个项. 如果：

(i) x_i 不是 $A(x_i)$中的自由变元，

或

(ii) x_i 是 $A(x_i)$中的自由变元，且 t 中的变元在 $A(t)$中都是自由变元，

则称 t **关于** $A(x_i)$**中的** x_i **是自由的.**

例 3.1.3 (i) 设 $A(x_1,x_2)$为$(\forall x_1)(\forall x_2)(A_1^2(x_1,x_2)\to A_1^1(x_2))$，则因 $A(x_1,x_2)$中没有自由变元，所以任何项 t 关于 $A(x_1,x_2)$中的 x_1 和 x_2 都是自由的.

(ii) 设 A 为$(\forall x_1)A_1^3(x_1,x_2,f_1^1(x_3))\to(\forall x_3)A_2^3(x_1,x_2,x_3)$，$t=f_1^2(x_1,x_2)$，则 t 关于 x_1 与 x_3 是自由的，因为 x_1 与 x_3 都不是 A 中的自由变元. 但 t 关于 x_2 不是自由的，因为 x_2 是 A 中的自由变元，且将 t 代入 x_2 的位置得

$$(\forall x_1)A_1^3(x_1,f_1^2(x_1,x_2),f_1^1(x_3))\to(\forall x_3)A_2^3(x_1,f_1^2(x_1,x_2),x_3),$$

结果 t 中的变元 x_1 不是自由变元了.

注 3.1.3 (i) 设公式 A 中含有变元 x_i，则 $t=x_i$ 作为项关于 $A(x_i)$中的 x_i 总是自由的. 因为如果 x_i 是 $A(x_i)$中的自由变元，则因 $t=x_i$，所以 $A(t)$中的 x_i 仍是自由变元，从而由定义 3.1.6 的(ii)知 $t=x_i$ 关于 $A(x_i)$中的 x_i 自由. 如果 x_i 不是 $A(x_i)$中的自由变元，则由定义 3.1.6 的(i)知 $t=x_i$ 仍然关于 $A(x_i)$中的 x_i 自由. 可见定义 3.1.6 中的第(i)条是必要的，有了这一条才可推出 x_i 关于 $A(x_i)$中的自身 x_i 是自由的这一合理结论.

(ii) 本书的定义 3.1.6 与参考文献[8]的相应定义是一致的. 但有的文献中(文献[1]中)这样定义 t 关于公式 $A(x_i)$中变元 x_i 的自由性：

"t 叫做关于公式 $A(x_i)$中的变元 x_i 是自由的，若 x_i 不自由出现于 $\forall x_j$ 的辖域之中，这里 x_j 是 t 中的变元". (3.1.2)

按此定义可以验证例 3.1.3 中的结果仍然都是对的. 但这种定义似有不足之处. 比如，设 $A(x_1,x_2)$为$(\forall x_1)(\forall x_2)A_1^2(x_1,x_2)$，$t=x_2$. 则 t 关于 $A(x_1,x_2)$中的 x_1 不自由，因为 $A(x_1,x_2)$中的 x_1 自由出现于$\forall x_2$ 的辖域之中，且 x_2 是 t 中的变元. 再设 $B(x_1,x_2)$为$(\forall x_2)(\forall x_1)A_1^2(x_1,x_2)$，则$\forall x_2$ 的辖域是$(\forall x_1)A_1^2(x_1,x_2)$，所以 $B(x_1,x_2)$中的 x_1 并没有自由出现于$(\forall x_2)$的辖域之中，因为 x_2 是 t 中的唯一变元，从而按式(3.1.2)的定义 t 关于 $B(x_1,x_2)$中的 x_1 是自由的了. 但以后将看到，上面的 $A(x_1,x_2)$和 $B(x_1,x_2)$是逻辑等价的，且含有相同的变元. 这种情况似不大协调.

(iii) 项 t 关于公式 $A(x_i)$中 x_i 是自由的这一概念主要是用于用 t 代入 $A(x_i)$

中的自由变元 x_i 处,并且保证这种代入的结果没有使 t 中的变元失去自由性(项 t 不是公式,可以认为 t 中的变元都是自由的,如参看文献[8]). 如果 x_i 在 $A(x_i)$本来就不自由,那么项 t 也无法代入,从而不会导致使 t 中变元成为不自由的后果. 所以从这一意义上看,定义 3.1.6 中的(i)也是合理的. 特别是当 t 中不含变元时,比如,t 是 $\mathscr{L}$ 中的某一个体常元 c,则 t 关于任何公式中的任何变元都是自由的.

习 题 3.1

1. 设 $\mathscr{L}$ 是一阶语言

(i) 设 $\mathscr{L}$ 中没有函数符号,且只有 3 个个体常元,试写出 $\mathscr{L}$ 中的项来.

(ii) 设 $\mathscr{L}$ 中不含个体常元且只有 1 个 1 元函数符号,试写出 $\mathscr{L}$ 中的项来.

(iii) 设 $\mathscr{L}$ 中不含函数符号,且只有 1 个 2 元谓词符号,试写出 $\mathscr{L}$ 中的原子公式来.

2. 以下各表达式中,哪些是公式?

(i) $f_1^3(x_1,x_2,f_1^1(x_3))$.

(ii) $A_1^3(x_1,x_2,f_1^1(x_3))$.

(iii) $(\forall x_2)A_1^1(x_2)\to(\forall x_3)A_1^2(a_1,x_3)$.

(iv) $A_2^1(f_3^3(x_1,x_2,a_3))$.

(v) $(\forall x_1)(\forall x_2)A_1^3(a_1,a_2,f_1^1(a_3))$.

3. 分别写出下列各公式中的约束变元与自由变元,并说明各变元自由出现和约束出现的次数.

(i) $(\forall x_1)(A_1^2(x_1,x_2)\to A_2^2(x_1,a_2))$.

(ii) $A_1^1(x_3)\to(\forall x_1)(\neg A_2^3(x_1,x_2,x_3))$.

(iii) $(\forall x_2)(A_1^1(f_1^2(f_1^2(x_1,x_2),x_1))\to(\forall x_1)A_2^2(x_3,f_2^2(x_1,x_2)))$.

4. 设 $t=f_1^3(x_1,a_2,x_3)$,把下列公式看成 $A(x_1)$(虽然它们还含有别的变元),问 t 关于 $A(x_1)$ 中的 x_1 是否自由?

(i) $(\forall x_4)A_1^2(x_4,f_1^2(x_1,x_4))\to A_1^1(x_1)$.

(ii) $(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(A_1^1(x_3)\to A_1^2(x_1,x_2))$.

(iii) $(\forall x_2)A_1^1(f_1^1(x_2))\to(\forall x_3)A_2^3(x_1,a_2,x_3)$.

(iv) $(\forall x_2)A_1^3(x_1,f_1^1(x_1),f_2^1(x_2))\to(\forall x_3)A_1^1(f_2^2(x_1,x_3))$.

又,分别把 t 改作 $x_2,x_3,f_1^3(a_1,a_2,x_1)$ 以及 $f_2^3(x_1,x_2,x_3)$,重新作以上各判断(注意,共 16 次判断).

3.2 解释、逻辑有效公式

3.2.1 解释

在命题演算中,一个原子公式 p 是不可再分的,我们可以给它赋以值 1 或 0 以表示它为真或为假. 但在谓词演算中一个原子公式 A 有了内部结构,比如,设 A 表示 $A_1^2(f_1^2(x_1,x_2),f_1^2(x_2,x_1))$,则 A 是否为真要看谓词 A_1^2 代表什么了. 比如 A_1^2 代

表“相等”，那么 $f_1^2(x_1,x_2)=f_1^2(x_2,x_1)$ 是否为真还要看 f_1^2 代表什么函数才能确定，比如 f_1^2 表示在格中对两个元取上确界，则这个等式成立. 但如果 f_1^2 表示在整数集中的减法，则这个等式就不成立了. 可见对谓词演算中的原子公式而言，我们不能像对待命题演算中的原子公式那样，简单地给它赋以值 1 或 0 以表示其真或假. 这要从对它涉及的语言符号的解释做起.

定义 3.2.1　设 $\mathscr{L}$ 是一阶语言，$\mathscr{L}$ 的**解释** I 的组成如下：

(i) 一个非空集 D_I，叫解释 I 的**论域**.

(ii) D_I 中的一组与 $\mathscr{L}$ 中的个体常元 $a_1,a_2,\cdots$ 相对应的特定元 $\overline{a_1}$，$\overline{a_2}$，$\cdots$

(iii) D_I 上的一组与 $\mathscr{L}$ 中的谓词符号 $\{A_i^n\}$ 相对应的关系 $\{\overline{A_i^n}\}$，这里 $\overline{A_i^n}\subset D_I^n$，即 $\overline{A_i^n}$ 是 D_I 上的 n 元关系.

(iv) D_I 上的一组与 $\mathscr{L}$ 中的函数符号 $\{f_i^n\}$ 相对应的函数 $\{\overline{f_i^n}\}$，这里 $\overline{f_i^n}:D_I^n\to D_I$ 是 D_I 上的 n 元函数.

注 3.2.1　(i) 有了解释 I 之后，$\mathscr{L}$ 中的变元 $x_1,x_2,\cdots$ 就可以通过“赋值”（下面有正式定义）而被赋予 D_I 中的值（即 D_I 中的元）. 这时一阶语言中的量词 $\forall$ 与 $\exists$ 是针对 D_I 中的元而讲的，而不是针对 D_I 的子集而讲的，这是一阶语言的特点，还有所谓“二阶语言”，那里的量词是针对 D_I 的子集以及更一般的 D_I 上的关系而讲的. 比如，“自然数的每个非空子集都含有最小元”这句话就超出了一阶语言的表达范围，因为它涉及了“每个非空子集”. 这种语句是要用二阶语言才能表达的.

(ii) 一阶语言 $\mathscr{L}$ 可以有多种不同的解释. 如果不管解释的好与坏，则任何 $\mathscr{L}$ 都有如下的解释：

取 D_I 为任一非空集，在 D_I 中固定一个元 $\bar{a}$，使 $\mathscr{L}$ 中每个个体常元都被解释为 $\bar{a}$，使 $\mathscr{L}$ 中每个函数符号都被解释为取常值 $\bar{a}$ 的函数，同时使 $\mathscr{L}$ 中每个谓词符号都被解释为空关系.

显然，这是一个不好的、无用的解释，但它毕竟是一种解释，可见任何一阶语言 $\mathscr{L}$ 一定有解释.

例 3.2.1　(i) 重新考虑例 3.1.1(i) 中描述自然数的语言 $\mathscr{L}$. 那里说可以用个体常元 a_1 表示自然数 0，用二元谓词符号 A_1^2 表示相等关系，等等. 现在可以用定义 3.2.1将其规范化，即 $D_I=\{0,1,2,\cdots\}$，$\bar{a}_1=0$，$\overline{A_1^2}$ 为 D_I 上的相等关系等等，这时公式

$$(\forall x_1)(\forall x_2)(\neg(\forall x_3)(\neg A_1^2(f_1^2(x_1,x_3),x_2)))\qquad(3.2.1)$$

的解释（把 x_1,x_2,x_3 分别改为 D_I 中的 x,y,z）就是：

“对任何自然数 x 与 y，并非对所有的自然数 z 都有 $x+z\neq y$”.

或等价地说

“对任何自然数 x 与 y，总有自然数 z 使 $x+z=y$”.

这就是上述解释下式(3.2.1)的意义.可见在这种解释下式(3.2.1)是错误的.

(ii) 上述一阶语言 $\mathscr{L}$还可用来表示整数及其运算.这时相应的解释的论域当然要改为 $D_I=\{0,\pm 1,\pm 2,\cdots\}$,其余不变.这时式(3.2.1)的意义就成为

"对任何整数 x 与 y,总有整数 z 使 $x+z=y$".

这显然又是对的了,可见一阶语言中可能有同一个公式 A,它在某些解释下是真的,而在另一些解释下却是假的.

3.2.2 赋值与满足

一阶语言 $\mathscr{L}$在有了解释 I 之后,$\mathscr{L}$中的个体常元、函数符号、项、谓词符号等就有了在 D_I 中的明确含义.$\mathscr{L}$中的公式就成为论域 D_I 中关于它所含变元的一种论断,比如一个原子公式 $A_1^2(t_1,t_2)$经过解释 I 后成为 D_I 中的某种论断$\overline{A_1^2}(\overline{t_1},\overline{t_2})$.因为一般来说,$t_1$ 与 t_2 中含有变元,所以关于$\overline{t_1},\overline{t_2}$的论断$\overline{A_1^2}$最终是关于变元的论断.这个论断正确与否取决于所涉及的变元在 D_I 中被怎样赋值而定,比如,在例3.1.1(i)中,公式 $A_1^2(f_1^2(x_1,x_2),f_2^2(x_1,x_2))$被解释为$\overline{A_1^2}(\overline{f_1^2}(x_1,x_2),\overline{f_2^2}(x_1,x_2))$,即"$x_1+x_2=x_1x_2$".这是关于变元 x_1 与 x_2 的论断,它是否成立要看 x_1 与 x_2 怎样在 N 中取值而定,变元的取值定下来之后才可以判断命题的真假.

定义 3.2.2　设 $\mathscr{L}$是一阶语言,I 是 $\mathscr{L}$的解释.$\mathscr{L}$**在 I 中的赋值** v 是从 $\mathscr{L}$的项集 $\mathscr{T}$ 到 D_I 的一个映射 $v:\mathscr{T}\to D_I$,满足条件:

(i) $v(a_i)=\overline{a_i}$,这里 a_i 是 $\mathscr{L}$中的个体常元.

(ii) $v(f_i^n(t_1,\cdots,t_n))=\overline{f_i^n}(v(t_1),\cdots,v(t_n))$,这里 f_i^n 是 $\mathscr{L}$中的函数符号.

注 3.2.2　上面的条件(i)其实在作解释 I 时已经说过了,有时可能还需要给 $\mathscr{L}$再增添几个备用的个体常元,其相应的 D_I 中的特定元视情况而定.又,$\mathscr{T}$中最简单的项是变元与个体常元,而一般的项又可通过函数符号由它们来表示.所以由条件(ii)知只要 v 在每个变元处的值 $v(x_1),v(x_2),\cdots$给定了,那么 v 在每个项 t 处的值也都完全确定了,所以如果用 X 表示全体变元之集,自然 $X\subset\mathscr{T}$,且 $\mathscr{L}$在 I 中的赋值 v 由 v 在 X 上的限制 $v|X$ 而定.

例 3.2.2　考虑一阶语言 $\mathscr{L}$及其自然数解释 I.规定

$$v(x_1)=1,\quad v(x_2)=2,\quad v(x_n)=0,\quad n=3,4,\cdots,$$

则 v 就决定了 $\mathscr{L}$在 I 中的一个赋值,这时

$$v(f_1^2(x_1,x_2))=\overline{f_1^2}(v(x_1),v(x_2))=v(x_1)+v(x_2)=3,$$

$$v(f_2^2(x_1,x_2))=\overline{f_2^2}(v(x_1),v(x_2))=v(x_1)\times v(x_2)=2.$$

从而公式 $A_1^2(f_1^2(x_1,x_2),f_2^2(x_1,x_2))$在这种赋值下不成立.但如果把赋值 $v(x_1)$改为 2,则这个公式又成立了.

定义 3.2.3　设 $\mathscr{L}$是一阶语言,I 是 $\mathscr{L}$的一个解释,v 和 v'是 $\mathscr{L}$在 I 中的两个赋值.若 v 与 v'满足条件

$$\text{当 } j\neq i \text{ 时 } v(x_j)=v'(x_j),\quad j=1,2,\cdots \tag{3.2.2}$$

则称赋值 v 与 v' 是 **i-等价**的.

通俗地说 v' 与 v i-等价时 v' 除可能在一个变元 x_i 处的值与 $v(x_i)$ 不同以外,在其他变元处的值全和 v 在那些变元处的值一样,即,v' 和 v“差不多”是一样的. 当然,不差也行,即,v 与自身也是 i-等价的($i=1,2,\cdots$).

定义 3.2.4 设 $\mathscr{L}$ 是一阶语言,I 是 $\mathscr{L}$ 的解释,v 是 $\mathscr{L}$ 在 I 中的一个赋值,A 是 $\mathscr{L}$ 中的一个公式. 所谓 v **满足** A 可以归纳地定义如下:

(i) 若 A 是原子公式 $A_j^n(t_1,\cdots,t_n)$,则 v 满足 A 指 $\overline{A_j^n}(v(t_1),\cdots,v(t_n))$ 是在 D_I 上为真的 n 元关系.

(ii) 若 A 是 $\neg B$,则 v 满足 A 指 v 不满足 B.

(iii) 若 A 是 $B\to C$,则 v 满足 A 指 v 满足 C 或 v 不满足 B.

(iv) 若 A 是 $(\forall x_i)B$,则 v 满足 A 指每个与 v i-等价的赋值 v' 都满足 B.

注 3.2.3 由此定义知对任一公式 A 以及任一赋值 v,v 满足 A 与 v 满足 $\neg A$ 二者必有一个且只有一个成立. 所以若 v 不满足 $\neg A$,则 v 一定满足 A. 与命题演算系统 $\boldsymbol{L}$ 不同,这里已经不谈论 v 在 A 处的“值”了. 当然,为了方便起见约定 $v(A)=1$ 当且仅当 v 满足 A 以及 $v(A)=0$ 当且仅当 v 不满足 A 也是可以的. 而且

$$v(\neg A)=\neg v(A),\quad v(A\to B)=v(A)\to v(B),$$
$$v((\forall x_i)A)=\wedge\{v'(A)\mid v'\text{与 } v\ i\text{-等价}\}. \tag{3.2.3}$$

这里三个等式右边的 $\neg$,$\to$ 和 $\wedge$ 都是 $\{0,1\}$ 中的运算. 所以当 $\mathscr{L}$ 的解释 I 确定之后,$\mathscr{L}$ 在 I 中的赋值 v 也可以理解为一种满足式(3.2.3)的特殊同态 $v:\mathscr{F}\to\{0,1\}$.

例 3.2.3 (i) 设 $\mathscr{L}$ 是表示自然数的语言,其解释 I 的论域 $D_I=N$. 考虑 $\mathscr{F}$ 中的如下公式 A:

$$A_1^2(f_2^2(x_1,x_2),f_2^2(x_3,x_4)).$$

在解释 I 之下 A 表示“$x_1x_2=x_3x_4$”. 如果 $\mathscr{L}$ 在 I 中的赋值 v 满足 $v(x_1)=2$,$v(x_2)=6$,$v(x_3)=3$,$v(x_4)=4$,则 $v(x_1x_2)=v(x_1)\cdot v(x_2)=v(x_3)\cdot v(x_4)=v(x_3x_4)$,所以 v 满足 A.

(ii) 承上,再设 $\mathscr{F}$ 中的公式 B 为 $(\forall x_1)A$,其中 A 为

$$A_1^2(f_2^2(x_1,x_2),f_2^2(x_2,x_1)). \tag{3.2.4}$$

由于在自然数解释中 $\overline{f_2^2}$ 为乘法,所以对任一赋值 v 均有

$$\overline{A_1^2}(\overline{f_2^2}(v(x_1),v(x_2)),\overline{f_2^2}(v(x_2),v(x_1)))$$

成立. 即 v 满足 A. 设 v' 是与 v 1-等价的赋值,则同理有 v' 满足 A,所以 v 满足 B.

回忆 $\exists x_i$ 是 $\neg(\forall x_i)\neg$ 的简写. 所以如果赋值 v 满足 $(\exists x_i)A$,则 v 不满足 $(\forall x_i)\neg A$. 由定义 3.2.4(iv),有与 v i-等价的赋值 v',v' 不满足 $\neg A$,即 v' 满足 A. 反过来,设 v' 满足 A,则 v' 不满足 $\neg A$,从而 v 不满足 $(\forall x_i)\neg A$,那么 v 满足 $\neg(\forall x_i)\neg A$,即 v 满足 $(\exists x_i)A$. 又,易证明若 v 满足 A,则 v 也满足 $(\exists x_i)A$. 所以有

命题 3.2.1　设 $\mathscr{L}$ 是一阶语言，I 是 $\mathscr{L}$ 的解释，v 是 $\mathscr{L}$ 在 I 中的赋值，$A\in\mathscr{F}$.

(i) 若 v 满足 A，则 v 也满足 $(\exists x_i)A$.

(ii) v 满足 $(\exists x_i)A$，当且仅当有与 v i-等价的赋值 v'，v' 满足 A.

例 3.2.4　设一阶语言 $\mathscr{L}$ 及其解释与例 3.2.3 相同. 设公式 $A(x_i)$ 表示 $A_1^2(f_2^2(x_i,x_i),f_1^1(f_1^1(x_i)))$. 设赋值 v 满足条件 $v(x_i)=2$，则 v 满足 $(\exists x_i)A(x_i)$. 事实上，由命题 3.2.1(i)，只需证明 v 满足 $A(x_i)$. 因为这时 $A(x_i)$ 在本例中被解释为"$x_i^2=x_i+2$"且 $v(x_i)=2$，所以这一等式成立，即 v 满足 $A(x_i)$.

注 3.2.4　在上例中 $\mathscr{L}$ 只有一个个体常元 a_1，且在作解释时已经把 a_1 解释为 D_I 中的特定元 0 了，即对任何赋值 v，$v(a_1)=0$. 所以任何赋值 v 都不满足公式 $A(a_1)$. 由于 a_1 是 $\mathscr{L}$ 中唯一的个体常元，这一事实还可表述为"对任一赋值 v 以及任一个体常元 a_i，v 都不满足 $A(a_i)$". 另一方面，上面已看到确实有赋值 v 满足公式 $(\exists x_i)A(x_i)$. 这一情况显然是不大协调的. 其原因在于赋值在各变元 $x_1,x_2,\cdots$ 处的值可以在 D_I 中任意选取，但它在 $\mathscr{L}$ 中个体常元处的值却已经固定. 为消除这种不协调性，我们约定，以后可以适当给 $\mathscr{L}$ 增添个体常元，并视情况确定与之相应的 D_I 中的特定元. 比如在上例中设 $\mathscr{L}$ 还有一个个体常元 a_2，并设 D_I 中与 a_2 相对应的特定元为 2，那么赋值 v 就满足公式 $A(a_2)$ 了. 一般地，我们有如下命题：

命题 3.2.2　设 $\mathscr{L}$ 是一阶语言，I 是 $\mathscr{L}$ 的解释，$A(x_i)$ 是含有自由变元 x_i 的公式，v 是 $\mathscr{L}$ 在 I 中的赋值.

(i) 若 v 满足公式 $(\exists x_i)A(x_i)$ 则 $\mathscr{L}$ 中有个体常元 c 使 v 满足 $A(c)$.

(ii) 若 v 满足 $A(c)$，c 是 $\mathscr{L}$ 中的个体常元，则 v 满足公式 $(\exists x_i)A(x_i)$.

由于这一命题涉及了用 c 对 $A(x_i)$ 中的 x_i 作代入，在未证明这个命题之前，我们先证明下面的项的代入定理.

命题 3.2.3(项的代入定理)　设 $\mathscr{L}$ 是一阶语言，I 是 $\mathscr{L}$ 的一个解释，$A(x_i)\in\mathscr{F}$，x_i 是 $A(x_i)$ 中的自由变元，设 t 是关于 $A(x_i)$ 中的 x_i 自由的项，v 是 $\mathscr{L}$ 在 I 中的赋值，v' 是与 v i-等价的赋值且 $v'(x_i)=v(t)$，则 v 满足 $A(t)$ 当且仅当 v' 满足 $A(x_i)$.

证明　第一步，先考虑关于项中变元的代换问题. 设 u 是 $\mathscr{L}$ 中的含 x_i 的项，u' 是在 u 中用 t 取代 x_i 所得之项，则

$$v(u')=v'(u).\tag{3.2.5}$$

事实上，若 u 只含一个符号 x_i，则

$$v'(u)=v'(x_i)=v(t)=v(u'),$$

即式(3.2.5)成立. 今设 u 是 $f_i^n(u_1,\cdots,u_n)$，并设式(3.2.9)对各 $u=u_j$ 已成立$(j=1,\cdots,n)$，则由 u' 是 $f_i^n(u'_1,\cdots,u'_n)$ 知

$$v(u')=\overline{f_i^n}(v(u'_1),\cdots,v(u'_n))=\overline{f_i^n}(v'(u_1),\cdots,v'(u_n))=v'(u).$$

这就证明了式(3.2.5).

第二步，回到公式中变元的代换问题. 先考虑原子公式. 设 $A(x_i)$ 是 $A_j^n(u_1,\cdots,u_n)$，

则 $A(t)$是 $A_j^n(u'_1,\cdots,u'_n)$. 设 v'满足 $A(x_i)$，即$\overline{A_j^n}(v'(u_1),\cdots,v'(u_n))$在 D_I 中成立，则由式(3.2.5)知这等价于$\overline{A_j^n}(v(u'_1),\cdots,v(u'_n))$在 D_I 中成立，即，v 满足 $A(t)$.

第三步，考虑一般公式中变元的代换问题，用归纳法证明.

(i) 设 $A(x_i)$是$\neg B(x_i)$，且定理对 $B(x_i)$已成立. 则

v'满足 $A(x_i)$　当且仅当　v'不满足 $B(x_i)$

当且仅当　v 不满足 $B(t)$

当且仅当　v 满足 $A(t)$.

(ii) 设 $A(x_i)$是 $B(x_i)\to C(x_i)$，且定理对 $B(x_i)$与 $C(x_i)$都成立，则

v'满足 $A(x_i)$　当且仅当　v'满足 $C(x_i)$或 v'不满足 $B(x_i)$

当且仅当　v 满足 $C(t)$或 v 不满足 $B(t)$

当且仅当　v 满足 $A(t)$.

(iii) 设 $A(x_i)$是$(\forall x_j)B(x_i)(j\neq i)$，且定理对 $B(x_i)$已成立，则

(1) 设 v 不满足 $A(t)$，则有与 v j-等价的赋值 w，w 不满足 $B(t)$. 由归纳假设知取与 w i-等价的赋值 w'，使 $w'(x_i)=w(t)$，则 w'不满足 $B(x_i)$. 因为 t 关于 $A(x_i)$(即$(\forall x_j)B(x_i)$)中的 x_i 自由，所以 x_j 不在 t 中出现，从而

$$v(t)=w(t).\tag{3.2.6}$$

由式(3.2.6)得

$$v'(x_i)=v(t)=w(t)=w'(x_i).\tag{3.2.7}$$

又，当 $k\neq i,k\neq j$ 时

$$v'(x_k)=v(x_k)=w(x_k)=w'(x_k),\tag{3.2.8}$$

所以由式(3.2.7)与式(3.2.8)二式知 w'与 v' j-等价. 既然 w'不满足 $B(x_i)$，所以 v'不满足$(\forall x_j)B(x_i)$，即 v'不满足 $A(x_i)$.

(2) 反过来，设 v'不满足 $A(x_i)$，即 v'不满足$(\forall x_j)B(x_i)$，则有与 v' j-等价的赋值 w'，w'不满足 $B(x_i)$. 这时

$$w'(x_i)=v'(x_i)=v(t).\tag{3.2.9}$$

令 $v^*(x_k)=v(x_k)(k\neq j)$且 $v^*(x_j)=w'(x_j)$，则 v^* 与 v j-等价，且因 t 中不含 x_j，故

$$v^*(t)=v(t).\tag{3.2.10}$$

由式(3.2.9)与式(3.2.10)得

$$w'(x_i)=v^*(t).$$

又，当 $k\neq i,k\neq j$ 时

$$v^*(x_k)=v(x_k)=v'(x_k)=w'(x_k)$$

且 $v^*(x_j)=w'(x_j)$，所以 v^* 与 w'是 i-等价的. 由归纳假设，v^* 不满足 $B(t)$. 因此 v 不满足$(\forall x_j)B(t)$，即 v 不满足 $A(t)$.

这就证明了项的代入定理.

现在证明命题 3.2.2.

(i) 设 v 满足 $(\exists x_i)A(x_i)$，则由命题 3.2.1(ii)知存在与 v i-等价的赋值 v'，v' 满足 $A(x_i)$. 设 $v'(x_i)=\bar{c}\in D_I$，在 $\mathscr{L}$ 中取与特定元 c 相对应的个体常元(如果没有，就添加一个)c，则 $v(c)=\bar{c}=v'(x_i)$，因为 v' 满足 $A(x_i)$，所以由项的代入定理知 v 满足 $A(c)$. 顺便指出，这个 c 是可随 v 而变的.

(ii) 设 v 满足 $A(c)$，且 $v(c)=\bar{c}\in D_I$. 取与 v i-等价的赋值 v' 使 $v'(x_i)=\bar{c}=v(c)$，则由项的代入定理知 v' 满足 $A(x_i)$，从而由命题 3.2.1(ii)知 v 满足 $(\exists x_i)A(x_i)$.

命题 3.2.2 并不是说 $(\exists x_i)A(x_i)$ 与 $A(c)$ 逻辑等价，请读者参看例 5.2.1.

3.2.3 关于解释 I 而言的真公式与假公式、可满足的公式与逻辑有效公式

定义 3.2.5 设 $\mathscr{L}$ 是一阶语言，I 是 $\mathscr{L}$ 的一个解释，$A\in\mathscr{F}$. 如果对 $\mathscr{L}$ 在 I 中的每个赋值 v 都有 v 满足 A，则称 A 是**关于 I 的真公式**，记作 $I\models A$. 如果对 $\mathscr{L}$ 在 I 中的每个赋值 v 都有 v 不满足 A，则称 A 为**关于 I 的假公式**. 当 $I\models A$ 时称**解释 I 满足 A**. 如果 $\mathscr{L}$ 有解释 I 满足 A，则称 A 是**可满足的**. 这时也称 I 为 A 的**模型**. 没有模型的公式叫**不可满足的**.

注 3.2.5 (i) 解释 I 满足公式 A 是一个整体性概念，指对 $\mathscr{L}$ 在 I 中的每个赋值 v 都有 v 满足 A，这与单个赋值 v 满足 A 是完全不同的. 当然，一个赋值 v 可以满足一个公式 A，但这时我们不使用"A 可以被满足"或"A 是可满足的"这些词，因为这些词表示 A 可在整体上被某个解释 I 所满足.

(ii) 关于一个解释 I 而言，有既非真又非假的公式，比如，考虑一阶语言 $\mathscr{L}$ 及其自然数解释 I. 如果取公式 A 为 $A_1^2(x_1,x_2)$，则其解释为"$x_1=x_2$". 这时对某些赋值 v 而言，v 满足"$x_1=x_2$"，只要 $v(x_1)=v(x_2)$ 就行. 但对另一些赋值 u，比如 u 满足条件 $u(x_1)=1$，$u(x_2)=2$，则 u 不满足"$x_1=x_2$". 所以 A 既不是真公式，又不是假公式. 这时解释 I 不满足 A，如果换一个解释 I_1，使 $\overline{A_1^2}=D_{I_1}\times D_{I_1}$，则显见 I_1 满足 A，所以 A 是可满足的. 又，请读者验证 $A\leftrightarrow\neg A$ 是不可满足的.

(iii) 对同一解释 I 而言，任一公式不能既为真公式，又为假公式.

(iv) 对同一解释 I 而言，A 与 $\neg A$ 不能都为真公式，若其中一个为真公式，则另一个为假公式，反之亦然.

(v) 对同一解释 I 而言，$A\to B$ 为假公式当且仅当 A 为真公式且 B 为假公式.

由赋值满足公式的定义 3.2.4 立即得出

命题 3.2.4 设 I 是一阶语言 $\mathscr{L}$ 的一个解释，$A,B,C\in\mathscr{F}$，那么：

(i) 若 $I\models(A\to B)$ 且 $I\models A$，则 $I\models B$. (3.2.11)

(ii) 若 $I\models A\to B$ 且 $I\models B\to C$，则 $I\models A\to C$. (3.2.12)

命题 3.2.5 设 I 是一阶语言 $\mathscr{L}$ 的一个解释，$A\in\mathscr{F}$，则：

(i) 若 $I\models A$，则 $I\models(\exists x_i)A$.

(ii) 若 $I\models A$，则 $I\models(\forall x_i)A$，且反之亦然.

(iii) 若 $I\models A$，则 $I\models(\forall y_1)\cdots(\forall y_n)A$，且反之亦然.

这里 $x_i,y_1,\cdots,y_n$ 都是变元符号.

证明　(i) 设 $I\models A$，v 是 $\mathscr{L}$ 在 I 中的任一赋值，则 v 满足 A，所以由命题3.2.1(i)知 v 满足 $(\exists x_i)A$. 由 v 的任意性即得 $I\models(\exists x_i)A$.

(ii) 设 $I\models A$，v 是 $\mathscr{L}$ 在 I 中的任一赋值. 则由 $I\models A$ 知与 v i-等价的赋值 v' 也满足 A，可见 v 满足 $(\forall x_i)A$. 由 v 的任意性即得 $I\models(\forall x_i)A$. 反过来容易从 $I\models(\forall x_i)A$ 得出 $I\models A$.

(iii) 是(ii)的直接推论.

定义 3.2.6　设 $A_0(p_1,\cdots,p_n)$ 是命题演算系统 $\boldsymbol{L}$ 中的公式，它由原子公式 $p_1,\cdots,p_n$ 经连接词连接而成. 如果把 $p_1,\cdots,p_n$ 分别用一阶语言 $\mathscr{L}$ 的公式 $A_1,\cdots,A_n$ 去代换，则得 $\mathscr{L}$ 中的一个公式 $A_0(A_1,\cdots,A_n)$，叫做 $A_0(p_1,\cdots,p_n)$ 的**代换实例**.

例如，设 $A_0(p_1,p_2)$ 为 $\neg p_1\to p_2$，则

$$\neg(\forall x_1)A_1^1(x_1)\to((\forall x_2)A_2^2(x_1,x_2)\to(A_1^1(x_2)\to(\forall x_1)A_3^1(x_1)))$$

是 $A_0(p_1,p_2)$ 的一个代换实例. 显然，上式也是 $\neg p_1\to(p_2\to p_3)$ 的代换实例，也是 $\neg p_1\to(p_2\to(p_3\to p_4))$ 的代换实例.

定义 3.2.7　一阶语言 $\mathscr{L}$ 中的公式 A 叫**重言式**，若它是 $\boldsymbol{L}$ 中某重言式的代换实例.

例如，$(\forall x_1)A_1^1(x_1)\to(\forall x_1)A_1^1(x_1)$ 是 $\mathscr{L}$ 中的重言式，因为它是 $\boldsymbol{L}$ 中的重言式 $p_1\to p_1$ 的代换实例.

命题 3.2.6　设 A 是一阶语言 $\mathscr{L}$ 中的重言式，则对 $\mathscr{L}$ 的任何解释 I 都有 $I\models A$.

证明　设 $\mathscr{L}$ 中的公式 $A_0(A_1,\cdots,A_k)$ 是 $\boldsymbol{L}$ 中公式 $A_0(p_1,\cdots,p_k)$ 的代换实例. 为简便计，以下用 A 记 $A_0(A_1,\cdots,A_k)$，用 A_0 记 $A(p_1,\cdots,p_k)$. 设 I 是 $\mathscr{L}$ 的解释，v 是 $\mathscr{L}$ 在 I 中的赋值. 注意 $A_0\in F(S)$，这里 $S=\{p_1,p_2,\cdots\}$. 定义映射 $v':S\to\{0,1\}$ 如下：

对于 $i=1,\cdots,k$，规定

$$v'(p_i)=\begin{cases}1, & \text{若 } v \text{ 满足 } A_i,\\ 0, & \text{若 } v \text{ 不满足 } A_i.\end{cases}$$

对于 $i>k$，规定 $v'(p_i)=0$，则 v' 生成 $F(S)$ 的一个赋值，仍记为 v'. 为证明命题 3.2.6，只需证明 v 满足 A 当且仅当 $v'(A_0)=1$.

设 A_0 是某原子公式 p_i，则由 v' 的定义知 v 满足 A 当且仅当 $v'(A_0)=1$. 以下用归纳法证明一般情形下的论断.

(i) 设 A_0 是 $\neg B_0$ 且论断对 B_0 成立. 这时 A 是 $\neg B$. 由归纳假设知 v 满足 B 当且仅当 $v'(B_0)=1$，即 v 不满足 B 当且仅当 $v'(B_0)=0$. 所以 v 满足 A 当且仅当 $v'(A_0)=1$.

(ii) 设 A_0 是 $B_0\to C_0$ 且论断对 B_0 与 C_0 都成立. 这时 A 是 $B\to C$. 由此得

v 满足 A　当且仅当　v 不满足 B 或 v 满足 C

　　　　　当且仅当　$v'(B_0)=0$ 或 $v'(C_0)=1$

　　　　　当且仅当　$v'(B_0\to C_0)=1$

　　　　　当且仅当　$v'(A_0)=1$

因为代换实例的原型 A_0 作为 $F(S)$ 中的公式不含量词，所以归纳推理已完成.

注 3.2.6　上述命题的逆命题不成立. 比如，由命题 3.2.5 容易证明对 $\mathscr{L}$ 的任一解释 I 有 $I\models A\to(\exists x_i)A$. 但 $A\to(\exists x_i)A$ 显然不是 $\boldsymbol{L}$ 中重言式的代换实例，所以 $A\to(\exists x_i)A$ 不是 $\mathscr{L}$ 中的重言式.

定义 3.2.8　一阶语言 $\mathscr{L}$ 中不含自由出现的变元的公式叫**闭公式**.

一个公式中的自由出现的变元是在赋值过程中真正起作用的变元. 这可由以下命题看出.

命题 3.2.7　设 $\mathscr{L}$ 是一阶语言，I 是 $\mathscr{L}$ 的一个解释，$A\in\mathscr{F}$，v 与 w 是 $\mathscr{L}$ 在 I 中的两个赋值. 如果对 A 中的每个自由出现的变元 x_i 都有 $v(x_i)=w(x_i)$，则 v 满足 A 当且仅当 w 满足 A.

证明　关于连接词与量词的总个数进行归纳证明. 设 A 中不含连接词与量词，则 A 是原子公式 $A_i^n(t_1,\cdots,t_n)$. 由假设知

$$v(t_1)=w(t_1),\cdots,v(t_n)=w(t_n),\tag{3.2.13}$$

这是因为 $t_1,\cdots,t_n$ 中的变元都是 A 中的自由变元. 由式(3.2.13)知 v 满足 A 当且仅当 w 满足 A. 以下是归纳推理.

(i) 设 A 是 $\neg B$ 且已证结论对 B 成立，则立即推出 v 满足 A 当且仅当 w 满足 A.

(ii) 设 A 是 $B\to C$ 且已证结论对 B 和 C 成立，则仍易推出 v 满足 A 当且仅当 w 满足 A.

(iii) 设 A 是 $(\forall x_i)B$ 且已证结论对 B 成立. 设 v 满足 A，w' 是与 w i-等价的赋值. 因为 x_i 不在 A 中自由出现，所以对 A 中每个自由出现的变元 y 均有 $v(y)=w'(y)$. 作赋值 v' 使

$$v'(x_i)=w'(x_i),$$
$$v'(x_j)=v(x_j),\quad j\neq i,$$

则 v' 与 v 是 i-等价的，从而 v' 满足 B. 又，对 B 中任一自由出现的变元 y，若 $y\neq x_i$，则 y 也是 A 中自由出现的变元，从而

$$w'(y)=w(y)=v(y)=v'(y).$$

又，当 $y=x_i$ 时有

$$w'(y)=w'(x_i)=v'(x_i)=v'(y),$$

所以 $w'(y)=v'(y)$. 因为已知 v' 满足 B，所以由归纳假设知 w' 满足 B. 但 w' 是与 w i-等价的任一赋值，所以 w 满足 A. 反过来，用同样的方法可证若 w 满足 A，则

v 满足 A.

这就证明了命题 3.2.7.

注意,在以上的证明(iii)中,由于 x_i 不在 A 中自由出现,所以得不出 $v(x_i)=w(x_i)$ 的条件. 但 x_i 可以在 B 中自由出现,所以 v 与 w 虽然对 A 中各自由出现的变元都取相同的值,但它们未必对 B 中各自由出现的变元都取相同的值(x_i 可能是例外). 正因如此,当对 B 应用归纳假设时 v 与 w 这一对赋值是不合用的,所以才有新一对赋值 v' 与 w' 的出现.

由命题 3.2.7 可以得出一条重要的推论. 设 A 是 $\mathscr{L}$ 中的闭公式,则 A 不含自由出现的变元,所以命题3.2.7中关于 v 与 w 的条件自然成立. 那么对 $\mathscr{L}$ 的任一解释以及 $\mathscr{L}$ 在 I 中的任二赋值均有 v 满足 A 当且仅当 w 满足 A,即一旦有一个赋值 v 满足 A,那么所有的赋值都满足 A. 又,由于 v 满足 A 与 v 满足 $\neg A$ 二者中必有一个成立,所以有如下推论:

推论 3.2.1 设 A 是一阶语言 $\mathscr{L}$ 中的闭公式,I 是 $\mathscr{L}$ 的任一解释,则 $I\models A$ 与 $I\models\neg A$有一个且仅有一个成立.

定义 3.2.9 $\mathscr{L}$ 中的公式 A 叫**逻辑有效**的,若对 $\mathscr{L}$ 的每个解释 I 均有 $I\models A$. A 叫**矛盾式**,若对 $\mathscr{L}$ 的每个解释 I 均有 $I\models\neg A$,即对 $\mathscr{L}$ 的每个解释 I 以及 $\mathscr{L}$ 在 I 中的每个赋值 v,v 都不满足 A.

由命题 3.2.6 可见,$\mathscr{L}$ 中的重言式是逻辑有效公式,但逻辑有效公式不限于重言式,如 $A\rightarrow(\exists x_i)A$,$(\forall x_i)A\rightarrow A$ 等都是逻辑有效公式,它们都不是重言式. 又,逻辑有效公式自然是可满足的公式,因为对 $\mathscr{L}$ 的任一解释 I,I 都满足这个公式. 但是反过来,如注 3.2.5(ii)所述,可满足的公式不必是逻辑有效公式.

由命题 3.2.4 立即得到如下命题:

命题 3.2.8 设 A,B,C 是一阶语言 $\mathscr{L}$ 中的公式.

(i) 若 $A\rightarrow B$ 和 A 都是逻辑有效公式,则 B 是逻辑有效公式.

(ii) 若 $A\rightarrow B$ 和 $B\rightarrow C$ 都是逻辑有效公式,则 $A\rightarrow C$ 是逻辑有效公式.

以后我们分别称(i)和(ii)为关于逻辑有效公式的 MP 规则和 HS 规则.

定义 3.2.10 设 $x_1,\cdots,x_n$ 是公式 A 中的全部自由出现的变元,则称$(\forall x_1)\cdots(\forall x_n)A$ 为 A 的完全闭包,记作 clA.

clA 自然是闭公式. 由命题 3.2.5 得

命题 3.2.9 设 A 是一阶语言 $\mathscr{L}$ 中的公式,则以下各条等价:

(i) A 是逻辑有效公式.

(ii) $(\forall x_i)A$ 是逻辑有效公式.

(iii) clA 是逻辑有效公式.

例 3.2.5 (i) $(\forall x_i)A\rightarrow(\exists x_i)A$ 是逻辑有效公式,事实上,前面已经说过 $(\forall x_i)A\rightarrow A$ 和$A\rightarrow(\exists x_i)A$都是逻辑有效公式,所以由命题 3.2.8(ii)知$(\forall x_i)A$

$\to(\exists x_i)A$ 是逻辑有效公式.

(ii) 设 A 为原子公式,则 A 不是逻辑有效的. 事实上,设 A 为 $A_i^n(t_1,\cdots,t_n)$. 设 I 是 $\mathscr{L}$ 的任一解释,则 $D_I\neq\varnothing$. 令 $\overline{A_i^n}$ 为 D_I^n 的空子集,则无论 $\mathscr{L}$ 在 I 中的赋值 v 是什么,$\overline{A_i^n}(v(t_1),\cdots,v(t_n))$ 总不成立,即 v 不满足 A,所以 A 不是逻辑有效公式.

(iii) 设 A 为公式 $(\forall x_1)(\exists x_2)A_1^2(x_1,x_2)\to(\exists x_1)(\forall x_2)A_1^2(x_1,x_2)$,则 A 不是逻辑有效公式. 事实上,设解释 I 的论域 $D_I=\mathbf{Z}$,$\overline{A_1^2}(y,z)$ 是关系"$y<z$",则 $(\forall x_1)(\exists x_2)A_1^2(x_1,x_2)$ 表示"$\forall y\in\mathbf{Z}$,存在 $z\in\mathbf{Z}$,使 $y<z$",这是对的. 但 $(\exists x_1)(\forall x_2)A_1^2(x_1,x_2)$ 表示"存在 $y\in\mathbf{Z}$,使得 $\forall z\in\mathbf{Z}$ 均有 $y<z$",这是不成立的. 即 $\mathscr{L}$ 有解释 I,对 $\mathscr{L}$ 在 I 中的每个赋值 v 均有 v 满足 $(\forall x_1)(\exists x_2)A_1^2(x_1,x_2)$,但 v 不满足 $(\exists x_1)(\forall x_2)A_1^2(x_1,x_2)$,因此 v 不满足 A,A 不是逻辑有效公式.

(iv) 容易看出,若 A 是矛盾式,则 A 是不可满足的. 但反过来,不可满足的公式(即没有模型的公式)不必为矛盾式. 比如,设 A 为 $A_1^1(x_1)\wedge\neg A_1^1(x_2)$,$I$ 是 $\mathscr{L}$ 的任一解释. 取 $\mathscr{L}$ 在 I 中的赋值 v 使 $v(x_1)=v(x_2)$,则 v 显然不满足 A,所以 I 不是 A 的模型,从而由 I 的任意性知 A 是不可满足的. 但 A 不是矛盾式. 事实上,设 I 为自然数解释,且 $\overline{A_1^1}=\{5n\mid n\in N\}$. 取赋值 v 使 $v(x_1)=5$,$v(x_2)=3$,则 v 满足 A,所以 A 不是矛盾式.

习　题　3.2

1. 设 $\mathscr{L}$ 是一阶语言,它有 1 个个体常元 a_1,1 个函数符号 f_1^2 和 1 个谓词符号 A_1^2,设公式 A 为

$$(\forall x_1)(A_1^2(x_1,a_1)\to A_1^2(f_1^2(x_1,x_1),a_1)). \tag{3.2.14}$$

(i) 设 $\mathscr{L}$ 的解释 I 为:$D_I=\mathbf{Z}$,$\overline{a_1}=0$,$\overline{f_1^2}(x,y)=xy$,$\overline{A_1^2}(x,y)$ 为"$x<y$",问式(3.2.14)在此解释下的意义是什么? 是真还是假?

(ii) 把解释 I 稍作改变,设 $\overline{f_1^2}(x,y)=x+y$,其余不变,问这时式(3.2.14)的意义是什么? 是真还是假?

(iii) 把解释 I 再稍作改变,设 $\overline{A_1^2}(x,y)$ 表示"$x=y$",问这时式(3.2.14)的意义是什么? 是真还是假?

2. 设一阶语言 $\mathscr{L}$ 与第 1 题相同,解释 I 为:$D_I=\mathbf{Z}$,$\overline{a_1}=0$,$\overline{f_1^2}(x,y)=x-y$,$A_1^2(x,y)$ 是"$x<y$". 设公式 A 是

$$(\forall x_1)(\forall x_2)(A_1^2(f_1^2(x_1,x_2),a_1)\to A_1^2(x_1,x_2)). \tag{3.2.15}$$

问式(3.2.15)在此解释下的意义是什么? 是真还是假? 又,试改变上述解释,使式(3.2.15)在新解释下的真、假情况与以上相反.

3. 设一阶语言中的公式 A 为

$$(\forall x_1)(A_1^1(x_1)\to A_1^1(f_1^1(x_1))). \tag{3.2.16}$$

公式 B 为

$$(\forall x_1)(A_1^2(x_1,x_2)\to A_1^2(x_2,x_1)). \tag{3.2.17}$$

试分别作出不同的解释使 $A(B)$ 有时为真，有时为假.

4. 一阶语言中有没有一种公式 A，它在任何解释下都是真的？

3.3 逻辑等价

定义 3.3.1 设 A 与 B 是一阶语言 $\mathscr{L}$ 中的两个公式，如果 $A\to B$ 与 $B\to A$ 都是逻辑有效公式，则称 A 与 B 是**逻辑等价**的，记作 $A\approx B$.

回忆 $v(A)=1$ 表示 v 满足 A，$v(A)=0$ 表示 v 不满足 A，我们有如下命题：

命题 3.3.1 设 $A,B\in\mathscr{F}$，则 $A\approx B$ 当且仅当对 $\mathscr{L}$ 的每个解释 I 以及 $\mathscr{L}$ 在 I 中的每个赋值 v 都有 $v(A)=v(B)$，即 v 满足 A 当且仅当 v 满足 B.

证明 设 $A\approx B$，I 是 $\mathscr{L}$ 的任一解释，则 $I\models A\to B$ 与 $I\models B\to A$ 都成立. 设 v 是 $\mathscr{L}$ 在 I 中的任一赋值，则 v 满足 $A\to B$ 且 v 满足 $B\to A$，由此立即推出 $v(A)=v(B)$. 显然，反向推理也成立.

命题 3.3.2 设 A 是一阶语言 $\mathscr{L}$ 中的公式则

$$(\forall x_1)(\forall x_2)A\approx(\forall x_2)(\forall x_1)A. \tag{3.3.1}$$

证明 只需证对 $\mathscr{L}$ 的任一解释 I 以及 $\mathscr{L}$ 在 I 中的任一赋值 v，$v(B)=1$ 当且仅当 $v(C)=1$，这里 B 与 C 分别表示式(3.3.1)左边与右边的公式.

设 $v(B)=1$，$\overline{c_1}$ 与 $\overline{c_2}$ 是 D_I 中任二元. 作赋值 $w=w(\overline{c_1},\overline{c_2})$ 如下：

$$w(x_1)=\overline{c_1},\quad w(x_2)=\overline{c_2},\quad w(x_i)=v(x_i),\quad i\neq 1,i\neq 2, \tag{3.3.2}$$

则 w 满足 A. 事实上，由 v 满足 $(\forall x_1)(\forall x_2)A$ 知每个与 v 与 1-等价的赋值 u 都满足 $(\forall x_2)A$，特别可取 u 使 $u(x_1)=\overline{c_1}$. 这时每个与 u 2-等价的赋值都满足 A. 这时已有 $w(x_1)=u(x_1)=\overline{c_1}$，所以 w 与 u 是 2-等价的，从而 w 满足 A. 如果 $v(C)=1$ 不成立，则存在与 v 2-等价的赋值 v'，$v'((\forall x_1)A)=0$，这时又存在与 v' 1-等价的赋值 v''，v'' 不满足 A. 设 $v''(x_1)=\overline{d_1}$，$v''(x_2)=\overline{d_2}$，则 $v''=w(\overline{d_1},\overline{d_2})$. 这与以上所证 $w(\overline{c_1},\overline{c_2})$ 对任意的 $\overline{c_1},\overline{c_2}\in D_I$ 都满足 A 相矛盾！所以 $v(C)=1$. 反过来，设 $v(C)=1$，同样可证 $v(B)=1$.

命题 3.3.3 设 $\approx$ 是 $\mathscr{F}$ 上的逻辑等价关系，则：

(i) $\approx$ 是 $\mathscr{F}$ 上的等价关系.

(ii) 设 $A\approx B$，则 $\neg A\approx\neg B$，$A,B\in\mathscr{F}$.

(iii) 设 $A\approx B$，$C\approx D$，则 $A\to C\approx B\to D$，$A,B,C,D\in\mathscr{F}$.

(iv) 设 $A\approx B$，则 $(\forall x_i)A\approx(\forall x_i)B$，$(\exists x_i)A\approx(\exists x_i)B$，$A,B\in\mathscr{F}$，$x_i$ 是 $\mathscr{L}$ 中的变元符号.

证明 (i) 由命题 3.3.1 立即看出 $\approx$ 是自反的、对称的和传递的，所以 $\approx$ 是 $\mathscr{F}$ 上的等价关系.

(ii) 设 $A \approx B$,则 $A \to B$ 与 $B \to A$ 都是逻辑有效公式. 又,易证 $\neg A \to \neg B \approx B \to A$, $\neg B \to \neg A \approx A \to B$,所以 $\neg A \to \neg B$ 和 $\neg B \to \neg A$ 都是逻辑有效公式,从而 $\neg A \approx \neg B$.

(iii) 设 $A \approx B, C \approx D$, v 是 $\mathscr{L}$ 在任一解释 I 中的任一赋值. 设 v 满足 $A \to C$,则 v 不满足 A 或 v 满足 C,由 $A \approx B$ 和 $C \approx D$ 知 v 不满足 B 或 v 满足 D,从而 v 满足 $B \to D$. 反过来,若 v 满足 $B \to D$,同理可证 v 满足 $A \to C$. 所以 $A \to C \approx B \to D$.

(iv) 设 $A \approx B$, v 是 $\mathscr{L}$ 在任一解释中的任一赋值,如果 v 满足 $(\forall x_i)A$,则与 v i-等价的每个赋值都满足 A. 因为 $A \approx B$,所以每个与 v i-等价的赋值都满足 B. 可见 v 满足 $(\forall x_i)B$. 又,相反的推理也成立,所以 $(\forall x_i)A \approx (\forall x_i)B$. 又,在此基础上注意 $(\exists x_i)$ 是 $\neg(\forall x_i)\neg$ 的简写,用两次(ii)即得 $(\exists x_i)A \approx (\exists x_i)B$.

习　题　3.3

1. 设 I 是 $\mathscr{L}$ 的解释, $A, B \in \mathscr{F}$.

(i) 试证 $A \to B$ 是关于 I 的假公式当且仅当 A 是关于 I 的真公式且 B 是关于 I 的假公式.

(ii) A 是关于 I 的真公式指 $I \models A$ 成立. 那么 A 是关于 I 的假公式是否指 $I \models A$ 不成立? 为什么?

(iii) 能不能说 $A \to B$ 是关于 I 的真公式当且仅当 B 是关于 I 的真公式或 A 是关于 I 的假公式? 为什么?

2. 考虑一阶语言 $\mathscr{L}$ 的自然数解释 I.

(i) 找出 $\mathscr{L}$ 在 I 中的赋值 v 来,使 v 满足公式 A,这里 A 分别为:

(1) $A_1^2(f_1^2(x_1, x_1), f_2^2(x_2, x_3))$.

(2) $(\forall x_1)A_1^2(f_2^2(x_1, x_2), x_3)$.

(3) $A_1^2(f_1^2(x_1, a_1), x_2) \to A_1^2(f_1^2(x_1, x_2), x_3)$.

(ii) 判断 $I \models A$ 是否成立,这里 A 分别为:

(1) $(\forall x_1)A_1^2(f_2^2(x_1, a_1), x_1)$.

(2) $(\forall x_1)(\forall x_2)(A_1^2(f_1^2(x_1, a_1), x_2) \to A_1^2(f_1^2(x_2, a_1), x_1))$.

(3) $(\exists x_1)A_1^2(f_1^2(x_1, x_1), f_2^2(x_1, x_1))$.

3. 试证下述公式是逻辑有效公式:

(i) $(\exists x_1)(\forall x_2)A_1^2(x_1, x_2) \to (\forall x_2)(\exists x_1)A_1^2(x_1, x_2)$.

(ii) $(\forall x_1)A_1^1(x_1) \to (\forall x_2)A_1^1(x_2)$(**提示**　若 v 满足 $(\forall x_1)A_1^1(x_1)$,则 $\overline{A_1^1} = D_I$).

(iii) $(\forall x_i)(A \to B) \to ((\forall x_i)A \to (\forall x_i)B)$.

4. 举出 3 个不是闭公式的逻辑有效公式.

5. 举出 3 个不是重言式的逻辑有效公式.

6. 设 x_i 在 $A(x_i)$ 中自由,且项 t 关于 $A(x_i)$ 中的 x_i 自由. 试证 $A(t) \to (\exists x_i)A(x_i)$ 是逻辑有效的(**提示**　利用项的代入定理).

7. 以下各公式是否逻辑有效? 为什么?

(i) $(\forall x_1)(\forall x_2)A_1^2(x_1, x_2) \to (\forall x_2)(\forall x_1)A_1^2(x_1, x_2)$.

(ii) $(\forall x_1)(A_1^1(a) \to A_1^1(x_1))$, a 是 $\mathscr{L}$ 中的 1 个个体常元.

(iii) $(\forall x_1)(\exists x_2)A_1^2(x_1,x_2)\to(\exists x_2)(\forall x_1)A_1^2(x_1,x_2)$.

(iv) $(\exists x_2)(\forall x_1)A_1^2(x_1,x_2)\to(\forall x_1)(\exists x_2)A_1^2(x_1,x_2)$.

8. 设 $A,B,C\in\mathscr{F}$,试证：

(i) $A\vee B\approx B\vee A$, $A\wedge B\approx B\wedge A$.

(ii) $A\wedge(B\vee C)\approx(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$, $A\vee(B\wedge C)\approx(A\vee B)\wedge(A\vee C)$.

9. 证明本章开始时所讲的推论(i)″～(iii)″是合理的.

第 4 章　一阶谓词演算的语构理论

在第 3 章里我们借助于合式公式集 $\mathscr{F}$ 以外的对象建立了一阶语言的解释及其在解释中的赋值等概念，基于这些 $\mathscr{F}$ 以外的工具描述了诸如项的代入定理、可满足性、逻辑有效公式以及逻辑等价性等一系列重要性质. 在本章中我们将从另一方式来刻画有关合式公式的基本性质，即通过在 $\mathscr{F}$ 自身中给出公理和推理规则来展开谓词演算理论，这就是一阶谓词演算的语构理论. 可见，由于一阶语言 $\mathscr{L}$ 的符号比命题演算系统 $\boldsymbol{L}$ 中的符号多，所以 $\mathscr{L}$ 的公理系统和推理规则也较形式系统 $\boldsymbol{L}$ 中的公理系统和推理规则复杂.

4.1　形式系统 $\boldsymbol{K}_{\mathscr{L}}$

4.1.1　一阶系统 $\boldsymbol{K}_{\mathscr{L}}$

我们记得，任何形式系统都由字符表、公式集、公理集和推理规则集这 4 部分组成. 由于前两个部分已经在介绍一阶语言 $\mathscr{L}$ 时讲述了，所以为给出与 $\mathscr{L}$ 相应的形式系统，只需再给出公理集与推理规则集即可.

定义 4.1.1　一阶系统 $\boldsymbol{K}_{\mathscr{L}}$ 的字符表和公式集是一阶语言 $\mathscr{L}$ 的字符表与公式集，其公理集与推理规则集如下：

(i) $\boldsymbol{K}_{\mathscr{L}}$ 的公理集由以下形式的公式组成：

(K1) $A\to(B\to A)$.

(K2) $(A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C))$.

(K3) $(\neg A\to\neg B)\to(B\to A)$.

(K4) $(\forall x_i)A\to A$.

(K5) $(\forall x_i)A(x_i)\to A(t)$ (x_i 是 $A(x_i)$ 的自由变元，且 t 项关于 $A(x_i)$ 中的 x_i 自由).

(K6) $(\forall x_i)(A\to B)\to(A\to(\forall x_i)B)$ (x_i 不在 A 中自由出现).

(ii) $\boldsymbol{K}_{\mathscr{L}}$ 的推理规则集含两条推理规则：

MP 规则：从 $A\to B$ 与 A 可得 B.

推广规则：从 A 可得 $(\forall x_i)A$.

以下用 Gen 表示推广规则（即 Generalization 的缩写）.

注 4.1.1　(i) 由后面将要讲的可靠性定理知公理(K1)～(K6)都是逻辑有效公式，在本章末又要证明凡逻辑有效公式都可以从这 6 条公理出发运用两条推理规则推出来，从而谓词演算的语义理论与语构理论是和谐统一的.

(ii) 不少著作中(K4)具有较弱的形式而(K5)具有较强的形式(参看文献[1]),即

(K4′) $(\forall x_i)A \to A$(x_i 不在 A 中自由出现).

(K5′) $(\forall x_i)A(x_i) \to A(t)$($t$ 关于 $A(x_i)$ 中的 x_i 自由).

因为 x_i 关于 $A(x_i)$ 中的 x_i 总是自由的,所以如果 x_i 在 $A(x_i)$ 中自由出现,则由(K5′)仍有 $(\forall x_i)A \to A$. 可见(K4′)后面的限制可以去掉. 因为以后经常使用的都是(K4)而不是(K4′),所以在本书中我们采用前者.

(iii) 公理(K5)后面的限制是必要的,因为否则它将可能不是逻辑有效公式. 比如,取一阶语言 $\mathscr{L}$ 的解释 I,使 $D_I=\mathbf{Z}$,A_1^2 的解释为二元关系"<",公式 $A(x_2)$ 为 $(\exists x_1)A_1^2(x_1,x_2)$. 令 t 为 x_1,则 t 关于 $A(x_2)$ 中的 x_2 不自由,这时(K5)的解释为

$$(\forall x_2)(\exists x_1)(x_1<x_2) \to (\exists x_1)(x_1<x_1).$$

这在 $\mathbf{Z}$ 中显然是不成立的,从而 $(\forall x_2)A(x_2) \to A(x_1)$ 不是逻辑有效公式.

(iv) 公理(K6)中要求 x_i 不在 A 中自由出现也是不可少的限制. 事实上,仍考虑上面的解释 I,这时

$$I \models (\forall x_2)(A_1^2(x_1,x_2) \to A_1^2(x_1,x_2)).$$

但有赋值 v 不满足 $A_1^2(x_1,x_2) \to (\forall x_2)A_1^2(x_1,x_2)$,所以(K6)型的公式

$$(\forall x_2)(A_1^2(x_1,x_2) \to A_1^2(x_1,x_2)) \to (A_1^2(x_1,x_2) \to (\forall x_2)A_1^2(x_1,x_2))$$

不是逻辑有效公式,其原因在于 x_2 在 $A_1^2(x_1,x_2)$ 中是自由的.

(v) 以下在不致混淆时把形式系统 $\boldsymbol{K}_{\mathscr{L}}$ 简记为 $\boldsymbol{K}$.

因为 $\boldsymbol{K}$ 比 $\boldsymbol{L}$ 多了一条推理规则 Gen,所以下面 $\boldsymbol{K}$ 中证明的定义是自然的.

定义 4.1.2 **$\boldsymbol{K}$ 中的证明**是一个有限的公式序列 $A_1,\cdots,A_n$,这里对每个 $i\leqslant n$,A_i 是公理,或 A_i 是通过前面的公式运用 MP 或 Gen 而得的公式. 这个证明叫 A_n 的证明,n 叫**证明的长度**,A_n 叫**定理**,记作 $\vdash_K A_n$,在不致混淆时也简记为 $\vdash A_n$.

注 4.1.2 (i) 因为 $\boldsymbol{K}$ 中的公理(K1)~(K3)是命题演算系统 $\boldsymbol{L}$ 中三条公理的代换实例,所以 $\boldsymbol{L}$ 中每个定理的代换实例必为 $\boldsymbol{K}$ 中的定理. 比如,$(p_1 \to p_2) \to (\neg p_2 \to \neg p_1)$ 是 $\boldsymbol{L}$ 中的定理,那么它的代换实例 $(A \to (\forall x_i)B) \to (\neg(\forall x_i)B \to \neg A)$ 就是 $\boldsymbol{K}$ 中的定理. 特别是由 $\boldsymbol{L}$ 的完备性定理知凡 $\boldsymbol{K}$ 中的重言式都是 $\boldsymbol{K}$ 中的定理.

(ii) 如果已经掌握了 $\boldsymbol{K}$ 中的若干定理,则今后在作判断时定义 4.1.2 中的条件"A_i 是公理"也可换为"A_i 是(已证的)定理".

定义 4.1.3 设 $\Gamma \subset \mathscr{F}$,$A \in \mathscr{F}$. **从 Γ 到 A 的推演**是一个有限的公式序列 $A_1,\cdots,A_n$,这里 A_n 是 A,对每个 $i\leqslant n$,A_i 是公理,或 $A_i \in \Gamma$,或 A_i 是通过前面的公式运用 MP 或 Gen 而得的公式. A 叫做 **Γ-推论**,记作 $\Gamma \vdash_K A$ 或 $\Gamma \vdash A$,n 叫做**推演长度**.

显然,定理可以看作是空集的推论,因而 $\varnothing \vdash A$ 与 $\vdash A$ 有相同的意义. 又,上面"A_i 是公理"也可换为"A_i 是定理". 当 $\Gamma=\{A\}$ 时,$\{A\} \vdash B$ 也简写为 $A \vdash B$.

4.1.2 可靠性定理

命题 4.1.1 $\boldsymbol{K}$ 中的公理都是逻辑有效公式.

证明 作为 $\boldsymbol{K}$ 中的重言式,公理(K1)～(K3)都是逻辑有效公式.又,(K4)是逻辑有效公式.以下证明(K5)与(K6)也是逻辑有效公式.

(i) (K5)是逻辑有效公式.

设 v 是 $\mathscr{L}$ 在任一解释 I 中的任一赋值.不妨设 v 满足 $(\forall x_i)A(x_i)$,则与 v i-等价的赋值 v' 都满足 $A(x_i)$,特别取 v' 使 $v'(x_i)=v(t)$,$v'(x_j)=v(x_j)(j\neq i)$,则 v' 满足 $A(x_i)$.因为项 t 关于 $A(x_i)$ 中的 x_i 自由,所以由项的代入定理(即命题 3.2.3)知 v 满足 $A(t)$,从而由 v 的任意性知(K5)是逻辑有效的.

(ii) (K6)是逻辑有效公式.

设 v 是 $\mathscr{L}$ 在任一解释 I 中的任一赋值.不妨设 v 满足 $(\forall x_i)(A\rightarrow B)$.以下只需证明 v 也满足 $A\rightarrow(\forall x_i)B$.为此又不妨设 v 满足 A.设 w 是与 v i-等价的任一赋值,则 w 满足 $A\rightarrow B$.因为 x_i 不在 A 中自由出现,所以由命题 3.2.7 以及 v 满足 A 知 w 满足 A,那么 w 就满足 B,从而 v 满足 $(\forall x_i)B$.所以 v 满足 $A\rightarrow(\forall x_i)B$.

命题 4.1.2(可靠性定理) $\boldsymbol{K}$ 中的定理都是逻辑有效公式.

证明 设 $\vdash A$,$A_1,\cdots,A_n$ 是 A 的证明序列,$A_n=A$.若 $n=1$,则 A 为公理,所以由命题 4.1.1 知 A 是逻辑有效公式.设 $n>1$,且当 A 的证明长度小于 n 时 A 是逻辑有效公式.现在 A 的证明长度等于 n.不妨设 A 不是公理.

(i) 设 A 由前面两项 B 与 $B\rightarrow A$ 运用 MP 而得,则由 $\vdash B$,$\vdash B\rightarrow A$ 以及归纳假设知 B 与 $B\rightarrow A$ 都是逻辑有效公式,所以由命题 3.2.8 知 A 是逻辑有效公式.

(ii) 设 A 由前面某项 B 运用 Gen 而得,即 $A=(\forall x_i)B$,则由 $\vdash B$ 以及归纳假设知 B 是逻辑有效公式,从而由命题 3.2.6 知 A 是逻辑有效公式.这就证明了可靠性定理.

推论 4.1.1 形式系统 $\boldsymbol{K}$ **是相容的**,即对任何公式 $A\in\mathscr{F}$,A 与 $\neg A$ 不能都是定理.

证明 设 $A\in\mathscr{F}$,A 与 $\neg A$ 都是 $\boldsymbol{K}$ 中的定理,则 A 与 $\neg A$ 都是逻辑有效公式,即 $\mathscr{L}$ 在每个解释 I 中的每个赋值 v 既满足 A 又满足 $\neg A$,而这是不可能的.

4.1.3 演绎定理

由于有量词符号和推广规则 Gen,一阶系统 $\boldsymbol{K}$ 中的演绎定理比命题演算系统 $\boldsymbol{L}$ 中的演绎定理要多一点限制.事实上,容易验证公式 $A\rightarrow(\forall x_i)A$ 不是逻辑有效的(请读者给出一个解释说明这一点),从而由 $\boldsymbol{K}$ 的可靠性定理知 $\vdash A\rightarrow(\forall x_i)A$ 不成立.但 $A\vdash(\forall x_i)A$ 显然成立:

(1) A 　　假设

(2) $(\forall x_i)A$ 　　(1),Gen

可见一般来说从 $\Gamma\cup\{A\}\vdash B$ 不能得出 $\Gamma\vdash A\rightarrow B$ 来.

命题 4.1.3(演绎定理)　设 $\Gamma \subset \mathscr{F}, A, B \in \mathscr{F}$. 如果 $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$ 且对每个在 A 中自由出现的变元 x,在从 $\Gamma \cup \{A\}$ 到 B 的推演中没有使用过关于$(\forall x)$的推广规则,则$\Gamma \vdash A \to B$.

证明　关于从 $\Gamma \cup \{A\}$ 到 B 的推演长度 n 作归纳证明. 若 $n=1$,则可仿照 $\boldsymbol{L}$ 中的演绎定理的证明方法完成证明. 设 $n>1$,且从 $\Gamma \cup \{A\}$ 到 C 的推演长度小于 n 时若未对 A 中自由出现的变元用过 Gen,则有 $\Gamma \vdash A \to C$. 今设从 $\Gamma \cup \{A\}$ 到 B 的推演长度等于 n. 不妨设 B 不是公理,也不属于 Γ 并且不是 A. 如果 B 是由前面两项运用 MP 而得的结果,则可像在证明 $\boldsymbol{L}$ 中的演绎定理那样证明 $\Gamma \vdash A \to B$. 所以只需讨论 B 是$(\forall x_i)C$ 的情形,这里 C 是从 $\Gamma \cup \{A\}$ 到 B 的推演中的一项. 既然在此推演中用到了从 C 到$(\forall x_i)C$ 的推广规则,可见 x_i 不在 A 中自由出现. 由归纳假设知存在从 Γ 到 $A \to C$ 的推演如下:

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & \\ \vdots & \\ (k) & A \to C\end{array}\right\}\ \text{从 } \Gamma \text{ 到 } A \to C \text{ 的推演.}$$

这个推演可以补充而成从 Γ 到 $A \to B$ 的推演如下:

$(k+1)$ $(\forall x_i)(A \to C)$　　(k),Gen

$(k+2)$ $(\forall x_i)(A \to C) \to (A \to (\forall x_i)C)$　　(K6)

$(k+3)$ $A \to (\forall x_i)C$　　$(k+1)$,$(k+2)$,MP

所以 $\Gamma \vdash A \to B$ 成立.

推论 4.1.2　设 $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$ 且 A 为闭公式,则 $\Gamma \vdash A \to B$.

推论 4.1.3(HS 规则)

$$\{A \to B, B \to C\} \vdash A \to C.$$

证明　因为

$$\{A, A \to B, B \to C\} \vdash C,$$

且在上述推演中只用了两次 MP,未用过 Gen,所以 HS 规则成立.

容易证明下面的演绎定理的逆定理成立.

命题 4.1.4　如果 $\Gamma \vdash A \to B$,则 $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$.

例 4.1.1　设 x_i 不在 A 中自由出现,则

$$\vdash (A \to (\forall x_i)B) \to (\forall x_i)(A \to B).$$

证明　(1) $A \to (\forall x_i)B$　　假设

(2) $(\forall x_i)B \to B$　　(K4)

(3) $A \to B$　　(1),(2),HS

(4) $(\forall x_i)(A \to B)$　　(3),Gen

所以$\{A \to (\forall x_i)B\} \vdash (\forall x_i)(A \to B)$. 因为上述推演虽用到了关于$(\forall x_i)$的 Gen,但 x_i 不在 A 中自由出现,从而也不在 $A \to (\forall x_i)B$ 中自由出现,所以由演绎定理

知本例的断言成立.

注 4.1.3　请读者务必注意"x 不在 A 中自由出现"的条件至关重要. 请看一个反例:设 A 为

$$((\forall x_1)A_1^1(x_1)\to(\forall x_1)A_1^1(x_1))\to A_2^1(x_1), \tag{4.1.1}$$

则 x_1 在 A 中自由出现(出现于原子公式 $A_2^1(x_1)$ 中). 演绎定理要求对"在 A 中自由出现的 x"未用过 Gen,这是较强的要求. 如果演绎定理中 $\Gamma\cup\{A\}\vdash B$ 中的 A 如式(4.1.1)所示,且在推演出 B 的过程中用过关于$(\forall x_1)$的 Gen,则 $\Gamma\vdash A\to B$ 不必成立. 事实上,设 $\Gamma=\varnothing$,A 如式(4.1.1)所示,且 B 为$(\forall x_1)A_2^1(x_1)$,则$\{A\}\vdash B$ 成立. 推演如下:

(1) $(\forall x_1)A_1^1(x_1)\to(\forall x_1)A_1^1(x_1)$　　定理

(2) $((\forall x_1)A_1^1(x_1)\to(\forall x_1)A_1^1(x_1))\to A_2^1(x_1)$　　假设

(3) $A_2^1(x_1)$　　(1),(2),MP

(4) $(\forall x_1)A_2^1(x_1)$　　(3),Gen

所以$\{A\}\vdash B$ 成立. 但 $\vdash A\to B$ 却不成立. 事实上,考虑 $\mathscr{L}$ 的自然数解释,把 A_1^1 解释为全体自然数之集,即$\overline{A_1^1}=N$,把 A_2^1 解释为 N 中的全体奇数之集,即$\overline{A_2^1}=\{1,3,5,\cdots\}$. 取赋值 v 使 $v(x_1)=3$,则 v 满足$((\forall x_1)A_1^1(x_1)\to(\forall x_1)A_1^1(x_1))\to A_2^1(x_1)$,即 v 满足 A,但 v 不满足$(\forall x_1)A_2^1(x_1)$,因为与 v 1-等价的赋值 v' 可在 x_1 处取偶数值. 所以 $A\to B$ 不是逻辑有效公式,那么由可靠性定理,$\vdash A\to B$ 不成立.

例 4.1.2　试证

$$\vdash(\forall x_i)(A\to B)\to((\exists x_i)A\to(\exists x_i)B). \tag{4.1.2}$$

证明　先证明

$$(\forall x_i)(A\to B)\vdash(\forall x_i)\neg B\to(\forall x_i)\neg A. \tag{4.1.3}$$

(1) $(\forall x_i)(A\to B)$　　假设

(2) $(\forall x_i)\neg B$　　假设

(3) $(\forall x_i)(A\to B)\to(A\to B)$　　(K4)

(4) $A\to B$　　(1),(3),MP

(5) $(A\to B)\to(\neg B\to\neg A)$　　重言式

(6) $\neg B\to\neg A$　　(4),(5),MP

(7) $(\forall x_i)\neg B\to\neg B$　　(K4)

(8) $\neg B$　　(2),(7),MP

(9) $\neg A$　　(6),(8),MP

(10) $(\forall x_i)\neg A$　　(9),Gen

至此已证明了

$$\{(\forall x_i)(A\to B),(\forall x_i)\neg B\}\vdash(\forall x_i)\neg A.$$

因为在以上推演中只用过一次关于$(\forall x_i)$的 Gen,且 x_i 不在$(\forall x_i)\neg B$ 中自由出

现，所以由演绎定理知式(4.1.3)成立(这里式(4.1.3)指本证明第 2 行末尾的标号，不是证明推演的序号)．

其次证明

$$(\forall x_i)(A \to B) \vdash (\exists x_i)A \to (\exists x_i)B. \qquad (4.1.4)$$

事实上，由注 4.1.2(i)知

$$\vdash ((\forall x_i)\neg B \to (\forall x_i)\neg A) \to (\neg(\forall x_i)\neg A \to \neg(\forall x_i)\neg B),$$

所以从式(4.1.3)出发运用 MP 就得出式(4.1.4)．又，以上在推演中没有对$(\forall x_i)(A \to B)$中自由出现的变元用过 Gen，所以由演绎定理即得式(4.1.2)．

习　题　4.1

1. 写出 **K** 中以下几个定理的证明：

(i) $(\forall x_i)(\neg B(x_i) \to (B(x_i) \to A(x_i)))$.

(ii) $(\forall x_i)(A \to A)$.

(iii) $A \to (\exists x_i)A$.

(iv) $(A \to B) \to (A \to (\exists x_i)B)$.

2. 试证以下各公式都是 **K** 中的定理：

(i) $(\exists x_i)(A \to B) \to (A \to (\exists x_i)B)$($x_i$ 不在 A 中自由出现)．

(ii) $(\exists x_i)(A \to B) \to ((\forall x_i)A \to B)$ (x_i 不在 B 中自由出现)．

(iii) $((\exists x_i)A \to B) \to (\forall x_i)(A \to B)$($x_i$ 不在 B 中自由出现)．

3. 举出不同于注 4.1.1 的例子说明：

(i) 公理(K5)中对 t 的限制是不可少的．

(ii) 公理(K6)中对 x_i 的限制是不可少的．

4. 试证$(\exists x_i)A \to A$ 不必为 **K** 中的定理．

5. 设 $A, B \in \mathscr{F}$，利用注 4.1.2(i)验证以下各式：

(i) $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$.

(ii) $\vdash A \to \neg(\neg A)$.

(iii) $\vdash \neg(\neg A) \to A$.

6. 设 $A, B \in \mathscr{F}$，x_i 是任一变元符号，试证：

(i) $\{A \to B, A\} \vdash (\exists x_i)B$.

(ii) $A \to B \vdash A \to (\exists x_i)B$.

(iii) $\vdash (A \to B) \to (A \to (\exists x_i)B)$.

7. 设 x_i 不在公式 A 中自由出现，试证：

(i) $\vdash ((\forall x_i)\neg B \to \neg A) \to ((\forall x_i)\neg B \to (\forall x_i)\neg A)$.

(ii) $\vdash (A \to (\exists x_i)B) \to ((\exists x_i)A \to (\exists x_i)B)$.

(iii) $\vdash (A \to B) \to ((\exists x_i)A \to (\exists x_i)B)$.

8. 试证以下各式都是 **K** 中的定理：

(i) $(A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$.

(ii) $(A\to\neg B)\to(B\to\neg A)$.

(iii) $A\to(B\to A\wedge B)$.

9. 试证:如果 $\vdash A\to B$ 且 $\vdash A\to C$,则 $\vdash A\to B\wedge C$.

10. 试证:如果 $\vdash A\to C$ 且 $\vdash B\to C$,则 $\vdash A\vee B\to C$.

4.2 可证等价关系

4.2.1 可证等价

定义 4.2.1 设 $A,B\in\mathscr{F}$. 如果 $A\to B$ 与 $B\to A$ 都是 $\boldsymbol{K}$ 中的定理,则称 A 与 B 是**可证等价**的,记作 $A\sim B$.

如果把公式 $(A\to B)\wedge(B\to A)$ 简记为 $A\leftrightarrow B$,则可以证明下面的命题.

命题 4.2.1 设 $A,B\in\mathscr{F}$,则 $A\sim B$ 当且仅当 $A\leftrightarrow B$ 是 $\boldsymbol{K}$ 中的定理.

证明 首先注意 $(A\to B)\wedge(B\to A)$ 即

$$\neg((A\to B)\to\neg(B\to A)). \tag{4.2.1}$$

由注 4.1.2(i)知 $\boldsymbol{K}$ 中的重言式都是定理,由此得

$$\vdash(\neg(C\to\neg D)\to C), \tag{4.2.2}$$

$$\vdash(\neg(C\to\neg D)\to D). \tag{4.2.3}$$

由式(4.2.2)与式(4.2.3)运用 MP 知,如果 $\neg(C\to\neg D)$ 是 $\boldsymbol{K}$ 中的定理,那么 C 与 D 也都是 $\boldsymbol{K}$ 中的定理. 特别令 C 与 D 分别为 $A\to B$ 与 $B\to A$,那么当 $A\leftrightarrow B$ 为 $\boldsymbol{K}$ 中定理时(即式(4.2.1)为 $\boldsymbol{K}$ 中定理时),$A\to B$ 与 $B\to A$ 都是 $\boldsymbol{K}$ 中的定理,所以 $A\sim B$.

反过来,设 $\vdash A\to B$, $\vdash B\to A$. 容易验证

$$\vdash C\to(D\to\neg(C\to\neg D)), \tag{4.2.4}$$

即

$$\vdash C\to(D\to C\wedge D). \tag{4.2.5}$$

分别令 C 与 D 为 $A\to B$ 与 $B\to A$,则 $\vdash C$, $\vdash D$,所以由式(4.2.4)得 $\vdash A\leftrightarrow B$.

由可靠性定理容易证明下面的

命题 4.2.2 设 $A,B\in\mathscr{F}$. 如果 $A\sim B$,则 $A\approx B$. 即,可证等价的公式是逻辑等价的.

命题 4.2.3 $\mathscr{F}$ 上的可证等价关系 $\sim$ 是关于运算 $\neg,\to,\vee,\wedge,(\forall x_i)$ 和 $(\exists x_i)$ 而言的同余关系 $(i=1,2,\cdots)$.

证明 设 $A,B,C,D\in\mathscr{F}$. $A\sim A$ 和 $A\sim B$ 当且仅当 $B\sim A$ 显然都是成立的. 设 $A\sim B,B\sim C$,则 $\vdash A\to B$ 且 $\vdash B\to C$,那么由 HS 立即得出 $\vdash A\to C$. 同理有 $\vdash C\to A$,所以 $A\sim C$. 这就证明了 $\sim$ 是 $\mathscr{F}$ 上的等价关系.

其次,设 $A\sim B$,则 $\vdash A\to B$. 又,$(A\to B)\to(\neg B\to\neg A)$ 是重言式从而是 $\boldsymbol{K}$ 中的定理,所以由 MP 即得 $\vdash\neg B\to\neg A$. 同理可证 $\vdash\neg A\to\neg B$. 所以 $\neg A\sim\neg B$. 即—

元运算$\neg$保持可证等价性.

再次,设$A\sim B,C\sim D$. 由$\vdash C\to D$和$\vdash((C\to D)\to(A\to(C\to D)))$得$\vdash A\to(C\to D)$.再由(K2)得

$$\vdash(A\to C)\to(A\to D). \tag{4.2.6}$$

同理可证

$$\vdash(A\to D)\to(A\to C). \tag{4.2.7}$$

由式(4.2.6)与式(4.2.7)得$A\to C\sim A\to D$. 类似可证$A\to D\sim B\to D$,所以$A\to C\sim B\to D$,可见二元运算$\to$也保持可证等价性. 因为$\vee$与$\wedge$均可通过$\neg$与$\to$来表达,所以$\vee$与$\wedge$也保持可证等价性.

最后,设$A\sim B$,则$\vdash A\to B$. 由(K4)有$\vdash(\forall x_i)A\to A$,所以由 HS 可得$\vdash(\forall x_i)A\to B$. 由此可得$(\forall x_i)A\vdash B$. 用一次推广规则得

$$(\forall x_i)A\vdash(\forall x_i)B. \tag{4.2.8}$$

因为x_i不在$(\forall x_i)A$中自由出现,所以由式(4.2.8)和演绎定理得$\vdash(\forall x_i)A\to(\forall x_i)B$. 同理可证$\vdash(\forall x_i)B\to(\forall x_i)A$. 所以$(\forall x_i)A\sim(\forall x_i)B$. 可见一元运算$(\forall x_i)$保持可证等价关系. 至于$(\exists x_i)$,只不过是$\neg(\forall x_i)\neg$的简写,所以它也保持可证等价关系($i=1,2\cdots$).

4.2.2　代换定理

下面的变元代换定理在以后的逻辑演算中会带来许多方便.

命题 4.2.4(变元代换定理)　设$A(x_i)\in\mathscr{F}$,x_i是$A(x_i)$中的自由变元,且$A(x_i)$不含变元x_j,则$(\forall x_i)A(x_i)$与$(\forall x_j)A(x_j)$可证等价.

证明　先证明

$$(\forall x_i)A(x_i)\vdash(\forall x_j)A(x_j). \tag{4.2.9}$$

(1) $(\forall x_i)A(x_i)$　　假设

(2) $(\forall x_i)A(x_i)\to A(x_j)$　　(K5)

(3) $A(x_j)$　　(1),(2),MP

(4) $(\forall x_j)A(x_j)$　　(3),Gen

这就证明了式(4.2.9). 由于以上推演中虽用了关于$(\forall x_j)$的推广规则,但x_j不在$(\forall x_i)A(x_i)$中自由出现,所以由式(4.2.9)和演绎定理即得

$$\vdash(\forall x_i)A(x_i)\to(\forall x_j)A(x_j). \tag{4.2.10}$$

以下只需再证明

$$\vdash(\forall x_j)A(x_j)\to(\forall x_i)A(x_i). \tag{4.2.11}$$

因为x_i不在$(\forall x_j)A(x_j)$中出现(为什么?),所以可以像证明式(4.2.10)一样证得式(4.2.11). 这就证明了$(\forall x_i)A(x_i)\sim(\forall x_j)A(x_j)$.

注 4.2.1　以上$A(x_i)$中不含变元x_j的要求是不可少的. 比如,$(\forall x_1)A_1^2(x_1,x_2)$与$(\forall x_2)A_1^2(x_2,x_2)$就不是可证等价的(比如,考虑自然数解释,其中$\overline{A_1^2}$为"=").

命题 4.2.5 设 $A\in\mathscr{F}$,则 A 是定理当且仅当 A 的完全闭包 clA 是定理.

证明 设 A 中的全部自由出现的变元为 $x_1,\cdots,x_n$. 若 $\vdash A$,则由推广规则可依次得 $\vdash(\forall x_n)A$, $\vdash(\forall x_{n-1})(\forall x_n)A,\cdots$,直至得出 $\vdash clA$. 反过来,若 $\vdash clA$,即 $\vdash(\forall x_1)\cdots(\forall x_n)A$,则由(K4)(共用 n 次)即得 $\vdash A$.

注 4.2.2 $\vdash A$ 当且仅当 $\vdash clA$ 并不是说 A 与 clA 可证等价. 事实上, $\vdash clA\to A$ 虽然成立,但 $\vdash A\to clA$ 一般不成立(请读者举出反例).

命题 4.2.4 是变元代换定理,下面还要讲公式代换定理. 为此我们先证明一个引理.

引理 4.2.1 设 $A,B\in\mathscr{F}$,则

$$\vdash(\forall x_i)(A\leftrightarrow B)\to((\forall x_i)A\leftrightarrow(\forall x_i)B). \tag{4.2.12}$$

证明 先证明

$$\{(\forall x_i)(A\to B),(\forall x_i)A\}\vdash(\forall x_i)B. \tag{4.2.13}$$

(1) $(\forall x_i)(A\to B)$ 假设

(2) $A\to B$ (1),(K4),MP

(3) $(\forall x_i)A$ 假设

(4) A (3),(K4),MP

(5) B (2),(4),MP

(6) $(\forall x_i)B$ (5),Gen

这就证明了式(4.2.13). 因为上面虽曾使用关于 $(\forall x_i)$ 的推广规则,但 x_i 不在 $(\forall x_i)A$ 中自由出现,也不在 $(\forall x_i)(A\to B)$ 中自由出现,所以运用两次演绎定理得

$$\vdash(\forall x_i)(A\to B)\to((\forall x_i)A\to(\forall x_i)B). \tag{4.2.14}$$

同理可证

$$\vdash(\forall x_i)(B\to A)\to((\forall x_i)B\to(\forall x_i)A). \tag{4.2.15}$$

又,可以证明对 $C,D\in\mathscr{F}$ 有

$$\vdash(\forall x_i)(C\wedge D)\to(\forall x_i)C. \tag{4.2.16}$$

事实上,先证明

$$(\forall x_i)(C\wedge D)\vdash(\forall x_i)C. \tag{4.2.17}$$

(1) $(\forall x_i)(C\wedge D)$ 假设

(2) $C\wedge D$ (1),(K4),MP

(3) $C\wedge D\to C$ 重言式

(4) C (2),(3),MP

(5) $(\forall x_i)C$ (4),Gen

因为 x_i 不在 $(\forall x_i)(C\wedge D)$ 中自由出现,所以由演绎定理和式(4.2.17)即得式(4.2.16). 由式(4.2.16)得

$$\vdash(\forall x_i)(A\leftrightarrow B)\to(\forall x_i)(A\to B), \tag{4.2.18}$$

$$\vdash(\forall x_i)(A\leftrightarrow B)\to(\forall x_i)(B\to A). \tag{4.2.19}$$

由式(4.2.18)和式(4.2.14)运用 HS 得

$$\vdash(\forall x_i)(A\leftrightarrow B)\to((\forall x_i)A\to(\forall x_i)B). \tag{4.2.20}$$

由式(4.2.19)和式(4.2.15)运用 HS 得

$$\vdash(\forall x_i)(A\leftrightarrow B)\to((\forall x_i)B\to(\forall x_i)A). \tag{4.2.21}$$

注意由 $\vdash C\to D$ 与 $\vdash C\to E$ 可得 $\vdash C\to D\wedge E$,则由式(4.2.20)与式(4.2.21)即得式(4.2.12).

命题 4.2.6(公式代换定理)　设公式 A^* 中包含有子公式 A. 把 A^* 中的一处或多处出现的 A 用公式 B 去代换而得公式 B^*,则

$$\vdash cl(A\leftrightarrow B)\to(A^*\leftrightarrow B^*). \tag{4.2.22}$$

证明　关于 A^* 中连接词与量词的总个数 n 进行归纳证明,但 A 作为一个整体看待,其中的连接词与量词不计算在内.

设 $n=0$,则 A^* 就是 A,这时 B^* 就是 B,所以式(4.2.22)成立.

设 $n<m$ 时定理成立,令 A^* 中含有 m 个连接词与量词.

(i) 设 A^* 是 $\neg C^*$. 这时 B^* 是 $\neg D^*$,D^* 是把 C^* 中的一处或多处 A 换成 B 而得的公式. 由归纳假设知

$$\vdash cl(A\leftrightarrow B)\to(C^*\leftrightarrow D^*). \tag{4.2.23}$$

易证$(C^*\leftrightarrow D^*)\to(\neg C^*\leftrightarrow\neg D^*)$是重言式从而是 **K** 中的定理,所以由式(4.2.23)运用 HS 可得

$$\vdash cl(A\leftrightarrow B)\to(\neg C^*\leftrightarrow\neg D^*),$$

即式(4.2.22)成立.

(ii) 设 A^* 是 $C^*\to D^*$,则 B^* 是 $E^*\to F^*$,这里 E^* 与 F^* 分别是由换 C^* 与 D^* 中的一处或多处 A 为 B 而得的公式. 由归纳假设知

$$\vdash cl(A\leftrightarrow B)\to(C^*\leftrightarrow E^*), \tag{4.2.24}$$

$$\vdash cl(A\leftrightarrow B)\to(D^*\leftrightarrow F^*). \tag{4.2.25}$$

由式(4.2.24)与式(4.2.25)可以证明

$$\{cl(A\leftrightarrow B),C^*\to D^*\}\vdash E^*\to F^*, \tag{4.2.26}$$

$$\{cl(A\leftrightarrow B),E^*\to F^*\}\vdash C^*\to D^*. \tag{4.2.27}$$

那么由演绎定理即可证明

$$cl(A\leftrightarrow B)\vdash(C^*\to D^*)\leftrightarrow(E^*\to F^*),$$

即

$$cl(A\leftrightarrow B)\vdash A^*\leftrightarrow B^*.$$

再由演绎定理即得式(4.2.22).

(iii) 设 A^* 是$(\forall x_i)C^*$,则 B^* 是$(\forall x_i)D^*$,这里 D^* 是把 C^* 中的一处或多处 A 换为 B 而得的公式. 由归纳假设知

$$\vdash cl(A\leftrightarrow B)\rightarrow(C^*\leftrightarrow D^*).$$

运用关于$(\forall x_i)$的推广规则得

$$\vdash(\forall x_i)(cl(A\leftrightarrow B)\rightarrow(C^*\leftrightarrow D^*)). \tag{4.2.28}$$

由(K6)，因为$cl(A\leftrightarrow B)$为闭公式，有

$$\vdash(\forall x_i)(cl(A\leftrightarrow B)\rightarrow(C^*\leftrightarrow D^*))\rightarrow(cl(A\leftrightarrow B)\rightarrow(\forall x_i)(C^*\leftrightarrow D^*)).$$

所以由式(4.2.28)运用 MP 得

$$\vdash cl(A\leftrightarrow B)\rightarrow(\forall x_i)(C^*\leftrightarrow D^*). \tag{4.2.29}$$

又，由引理 4.2.1 有

$$\vdash(\forall x_i)(C^*\leftrightarrow D^*)\rightarrow((\forall x_i)C^*\leftrightarrow(\forall x_i)D^*). \tag{4.2.30}$$

由式(4.2.29)与式(4.2.30)运用 HS 即得式(4.2.22).

推论 4.2.1　在上述代换中如果$A\sim B$，则$A^*\sim B^*$.

即在公式A^*中把它的一处或多处的子公式A用与A可证等价的公式B去代换，所得的公式B^*与A^*可证等价.

推论 4.2.2　设$(\forall x_i)A(x_i)$是A^*的子公式，x_i是$A(x_i)$中的自由变元，x_j不在$A(x_i)$中出现.设B^*是把A^*中的$(\forall x_i)A(x_i)$用$(\forall x_j)A(x_j)$代换而得的公式.则$A^*\sim B^*$.

证明　由变元代换定理以及推论 4.2.1 即得本推论.

习　题　4.2

1. 举例说明$A\rightarrow clA$一般不是$\mathbf{K}$中的定理.
2. 设$A,B\in\mathscr{F}$，试证$A\rightarrow(B\rightarrow C)\sim B\rightarrow(A\rightarrow C)$.
3. 设$A,B,C,D\in\mathscr{F}$，且$A\sim B,C\sim D$，试证

$$A\rightarrow C\sim B\rightarrow D.$$

4. 利用式(4.2.24)和式(4.2.25)证明式(4.2.26)和式(4.2.27).
5. 试证

(i) $(\forall x_1)(\forall x_2)A_1^2(x_1,x_2)\vdash(\forall x_2)(\forall x_3)A_1^2(x_2,x_3)$.

(ii) $(\forall x_1)(\forall x_2)A_1^2(x_1,x_2)\vdash(\forall x_1)A_1^2(x_1,x_1)$.

6. 设x_i是$A(x_i)$中的自由变元，且$A(x_i)$不含变元x_j，试证

$$(\exists x_i)A(x_i)\sim(\exists x_j)A(x_j).$$

7. 试证　$(\forall x_i)(\forall x_i)A\sim(\forall x_i)A$.
8. 设$A(x_1,x_2)$含有自由变元x_1与x_2，试证

$$(\forall x_1)(\forall x_2)A(x_1,x_2)\sim(\forall x_2)(\forall x_1)A(x_1,x_2).$$

9. 设公式A中不含变元x_i，试证$A\sim(\forall x_i)A$.

4.3　前束范式

一阶语言$\mathscr{L}$中的公式可以在多处含有全称量词与存在量词.比如下面的公式

就是如此：

$$((\forall x_1)(\forall x_2)A_1^2(x_1,x_2)\to\neg(\exists x_2)A_1^1(x_2))\to(\forall x_1)(\forall x_2)A_2^2(x_1,x_2). \tag{4.3.1}$$

这种量词分散于各处的公式在进行逻辑演算时往往不如那种全部量词都集中在前面的公式方便. 本节证明每个公式在可证等价的意义下都可化成所谓前束范式(prenex normal form)，即全部量词都集中在公式的最前面的那种公式. 我们先建立若干引理.

4.3.1 若干引理

引理 4.3.1 设变元 x_i 不在公式 A 中自由出现，则

$$(\forall x_i)(A\to B)\sim(A\to(\forall x_i)B). \tag{4.3.2}$$

证明 由于 x_i 不在 A 中自由出现，所以由(K6)得

$$\vdash(\forall x_i)(A\to B)\to(A\to(\forall x_i)B). \tag{4.3.3}$$

又，当 x_i 不在 A 中自由出现时我们已经于例 4.1.1 中证明了

$$\vdash(A\to(\forall x_i)B)\to(\forall x_i)(A\to B). \tag{4.3.4}$$

由式(4.3.3)与式(4.3.4)即得式(4.3.2).

引理 4.3.2 设变元 x_i 不在公式 A 中自由出现，则

$$(\exists x_i)(A\to B)\sim(A\to(\exists x_i)B). \tag{4.3.5}$$

证明 先证明

$$\vdash(\exists x_i)(A\to B)\to(A\to(\exists x_i)B). \tag{4.3.6}$$

事实上，由$\{A\to B,A\}\vdash B$ 和 $\vdash B\to(\exists x_i)B$ 得$\{A\to B,A\}\vdash(\exists x_i)B$. 由于不涉及 Gen，使用两次演绎定理得

$$\vdash(A\to B)\to(A\to(\exists x_i)B). \tag{4.3.7}$$

由式(4.3.7)出发易证以下各式：

$$\vdash\neg(A\to(\exists x_i)B)\to\neg(A\to B),$$

$$\neg(A\to(\exists x_i)B)\vdash\neg(A\to B),$$

$$\neg(A\to(\exists x_i)B)\vdash(\forall x_i)\neg(A\to B).$$

由于 x_i 不在 A 中自由出现，从而也不在$\neg(A\to(\exists x_i)B)$中自由出现，所以由演绎定理得

$$\vdash\neg(A\to(\exists x_i)B)\to(\forall x_i)\neg(A\to B).$$

由此可得

$$\vdash\neg(\forall x_i)\neg(A\to B)\to(A\to(\exists x_i)B).$$

这就证明了式(4.3.6).

以下只需证明

$$\vdash(A\to(\exists x_i)B)\to(\exists x_i)(A\to B). \tag{4.3.8}$$

事实上，因为$\neg A\to(A\to B)$是重言式，从而是 ***K*** 中的定理. 又，易证$(A\to B)\to$

$(\exists x_i)(A\to B)$也是 **K** 中的定理，所以由 HS 得

$$\vdash \neg A\to(\exists x_i)(A\to B). \tag{4.3.9}$$

又，因为$(\forall x_i)\neg(A\to B)\vdash(\forall x_i)\neg B$(为什么?)，所以由演绎定理得

$$\vdash(\forall x_i)\neg(A\to B)\to(\forall x_i)\neg B,$$

所以有

$$\vdash(\exists x_i)B\to(\exists x_i)(A\to B). \tag{4.3.10}$$

由式(4.3.9)与式(4.3.10)得(见习题 4.1,10)

$$\vdash \neg A\vee(\exists x_i)B\to(\exists x_i)(A\to B).$$

由于$\neg A\vee(\exists x_i)B$是$\neg\neg A\to(\exists x_i)B$的简写，且$\neg\neg A\sim A$，所以由公式代换定理即得式(4.3.8).

引理 4.3.3 设变元 x_i 不在公式 B 中自由出现，则

$$(\forall x_i)(A\to B)\sim((\exists x_i)A\to B). \tag{4.3.11}$$

证明 由命题 4.2.3 和引理 4.3.1 得

$$\begin{aligned}(\forall x_i)(A\to B)&\sim(\forall x_i)(\neg B\to\neg A)\\&\sim\neg B\to(\forall x_i)\neg A\\&\sim(\exists x_i)A\to B.\end{aligned}$$

所以引理 4.3.3 成立.

引理 4.3.4 设变元 x_i 不在 B 中自由出现，则

$$(\exists x_i)(A\to B)\sim((\forall x_i)A\to B). \tag{4.3.12}$$

证明 因为 x_i 不在$\neg B$中自由出现，所以由引理 4.3.2 知

$$(\exists x_i)(\neg B\to\neg A)\sim(\neg B\to(\exists x_i)\neg A).$$

由此立即得出

$$(\exists x_i)(A\to B)\sim((\forall x_i)A\to B).$$

以上 4 个引理是很有用的，它们可以在一定条件下把公式中间的量词移到公式的前面去.

4.3.2 前束范式

定义 4.3.1 设 $A\in\mathscr{F}$. 如果 A 具有如下形式：

$$(Q_1x_{i_1})\cdots(Q_nx_{i_n})D,\quad n\geqslant 0, \tag{4.3.13}$$

这里 Q_j 表示$\forall$或$\exists$，且 D 中不含量词，则称 A 为**前束范式**.

在式(4.3.13)中设 $n=0$，可知不含量词的公式也算前束范式. 下面是前束范式的一个例子：

$$(\exists x_3)(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_4)(\forall x_5)((A_1^2(x_1,x_2)\to\neg A_1^1(x_3))\to A_2^2(x_4,x_5)). \tag{4.3.14}$$

后面将看到式(4.3.14)是和式(4.3.1)可证等价的前束范式.

命题 4.3.1(前束范式定理) 设 $A\in\mathscr{F}$，则 A 可证等价于某前束范式 B.

证明 由变元代换定理和公式代换定理知,可设 A 中所有的约束变元都互不相同,同时都不同于 A 中的自由变元. 因为变元符号有无穷多个,在可证等价的意义下这一点总是可以做到的. 以下用关于 A 中连接词与量词的总个数的归纳法进行证明.

若 A 不含连接词与量词,则 A 是原子公式,自然是前束范式. 设 A 不是原子公式,且假定每个所含连接词与量词的总个数比 A 的少的公式都可化为与之可证等价的前束范式.

(i) 设 A 是 $\neg C$.

由归纳假设,有前束范式 $C_1 \sim C$. 设 C_1 为

$$(Q_1 x_{i_1})\cdots(Q_k x_{i_k})D, \quad D \text{ 中不含量词},$$

则

$$A \sim \neg C_1 \sim (Q_1^* x_{i_1})\cdots(Q_k^* x_{i_k})\neg D,$$

这里分别当 Q_j 是 $\forall$ 或 $\exists$ 时 Q_j^* 是 $\exists$ 或 $\forall$. 所以 A 可证等价于一个前束范式.

(ii) 设 A 是 $C \rightarrow D$.

由归纳假设知 A 可证等价于一个如下形式的公式:

$$(Q_1 x_{i_1})\cdots(Q_k x_{i_k})C_1 \rightarrow (R_1 y_{j_1})\cdots(R_l y_{j_l})D_1, \tag{4.3.15}$$

这里 Q_s, R_t 为 $\forall$ 或 $\exists$ $(s=1,\cdots,k, t=1,\cdots,l)$,且 C_1 与 D_1 中不含量词. 由证明开始时的假定知 $x_{i_1},\cdots,x_{i_k}$ 不在 $(R_1 y_{j_1})\cdots(R_l y_{j_l})D_1$ 中自由出现,所以由引理 4.3.3 和引理 4.3.4 知式(4.3.15)可证等价于

$$(Q_1^* x_{i_1})\cdots(Q_k^* x_{i_k})(C_1 \rightarrow (R_1 y_{j_1})\cdots(R_l y_{j_l})D_1). \tag{4.3.16}$$

这里 Q_i^* 分别当 Q_i 为 $\forall$ 或 $\exists$ 时为 $\exists$ 或 $\forall$. 又,$y_{j_1},\cdots,y_{j_l}$ 不在 C_1 中自由出现,所以由引理 4.3.1 和引理 4.3.2 知式(4.3.16)可证等价于

$$(Q_1^* x_{i_1})\cdots(Q_k^* x_{i_k})(R_1 y_{j_1})\cdots(R_l y_{j_l})(C_1 \rightarrow D_1). \tag{4.3.17}$$

式(4.3.17)就是和 A 可证等价的前束范式.

(iii) 设 A 是 $(\forall x_i)C$.

由归纳假设知 C 可证等价于某前束范式. 这时 A 显然也可证等价于一个前束范式. 定理证毕.

例 4.3.1 (i) 化 $(\exists x_1)A_1^1(x_1) \rightarrow (\forall x_2)A_1^2(x_2, x_3)$ 为与之可证等价的前束范式.

解 由于 x_2 不在 $(\exists x_1)A_1^1(x_1)$ 中自由出现,由式(4.3.2)知原式可证等价于

$$(\forall x_2)((\exists x_1)A_1^1(x_1) \rightarrow A_1^2(x_2, x_3)).$$

又,x_1 不在 $A_1^2(x_2, x_3)$ 中自由出现,所以由式(4.3.11)知原式最终可证等价于

$$(\forall x_2)(\forall x_1)(A_1^1(x_1) \rightarrow A_1^2(x_2, x_3)).$$

(ii) 求与式(4.3.1)可证等价的前束范式.

解 由变元代换定理和公式代换定理知式(4.3.1)可证等价于

$$((\forall x_1)(\forall x_2)A_1^2(x_1,x_2)\to\neg(\exists x_3)A_1^1(x_3))\to(\forall x_4)(\forall x_5)A_2^2(x_4,x_5).$$

即

$$((\forall x_1)(\forall x_2)A_1^2(x_1,x_2)\to(\forall x_3)\neg A_1^1(x_3))\to(\forall x_4)(\forall x_5)A_2^2(x_4,x_5).\tag{4.3.18}$$

利用引理4.3.1～引理4.3.4可证式(4.3.18)(从而式(4.3.1))与以下各式可证等价：

$$(\forall x_3)((\forall x_1)(\forall x_2)A_1^2(x_1,x_2)\to\neg A_1^1(x_3))\to(\forall x_4)(\forall x_5)A_2^2(x_4,x_5).$$

$$(\forall x_3)(\exists x_1)(\exists x_2)(A_1^2(x_1,x_2)\to\neg A_1^1(x_3))\to(\forall x_4)(\forall x_5)A_2^2(x_4,x_5).$$

$$(\exists x_3)(\forall x_1)(\forall x_2)((A_1^2(x_1,x_2)\to\neg A_1^1(x_3))\to(\forall x_4)(\forall x_5)A_2^2(x_4,x_5)).$$

$$(\exists x_3)(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_4)(\forall x_5)((A_1^2(x_1,x_2)\to\neg A_1^1(x_3))\to A_2^2(x_4,x_5)).\tag{4.3.19}$$

式(4.3.19)就是所求的前束范式，它就是前面已经指出的与式(4.3.1)可证等价的式(4.3.14).

注意，上面例(ii)中答案的形式不是唯一的.比如，答案也可以是

$$(\forall x_4)(\forall x_5)(\exists x_3)(\forall x_1)(\forall x_2)((A_1^2(x_1,x_2)\to\neg A_1^1(x_3))\to A_2^2(x_4,x_5)).\tag{4.3.20}$$

式(4.3.19)与式(4.3.20)虽然是可证等价的，前面也各有4个量词，但式(4.3.19)以存在量词开头，然后改变为全称量词，以后不再改变量词的性质.而式(4.3.20)以全称量词开头，随后有从全称量词到存在量词再从存在量词到全称量词的变化.从以后要讲的Skolem变形的演算来看，式(4.3.19)要比式(4.3.20)简单一些.

定义4.3.2　以全称量词开头的前束范式称为Π-型的，若此后量词的名称改变$n-1$次($n\geqslant1$)，则称该前束范式为Π_n-型的.以存在量词开头的前束范式叫Σ-型的，若此后量词的名称改变$n-1$次($n\geqslant1$)，则称该前束范式为Σ_n-型的.

比如，式(4.3.19)是Σ_2-型的前束范式，而式(4.3.20)是Π_3-型的前束范式.

习　题　4.3

1. 试证：

(i) $\{(\forall x_i)(A\to B),\neg B\}\vdash(\forall x_i)\neg A.$

(ii) $(\forall x_i)(A\to B)\vdash(\exists x_i)A\to B$($x_i$不在$B$中自由出现).

2. 化以下各式为和它们可证等价的前束范式：

(i) $(\exists x_1)A_1^1(x_1)\to(\exists x_2)A_1^2(x_1,x_2).$

(ii) $(\forall x_1)A_1^2(x_1,x_2)\to(\forall x_2)A_1^2(x_1,x_2).$

(iii) $(\exists x_1)(A_1^1(x_1)\to A_1^2(x_1,x_2))\to((\forall x_2)A_1^1(x_2)\to(\exists x_3)A_1^2(x_2,x_3)).$

(iv) $(\exists x_1)\neg A_1^2(x_1,x_2)\to(A_1^1(x_1)\to\neg(\forall x_3)A_1^2(x_1,x_3)).$

3. 设 A 与 B 不含相同的变元，试证

$$(\exists x_1)(\forall x_2)(A(x_1)\to B(x_2))\sim(\forall x_2)(\exists x_1)(A(x_1)\to B(x_2)).$$

又，举例说明当 A 与 B 含有共同变元时上式不必成立(参看习题 3.3,7).

4. 设$(Q_1x_1)\cdots(Q_nx_n)A_0$ 和$(R_1y_1)\cdots(R_my_m)B_0$ 分别是与 A 和 B 可证等价的前束范式(A_0，B_0 不含量词)，且此二范式中不含相同的变元，试证

$$(Q_1x_1)\cdots(Q_nx_n)(R_1y_1)\cdots(R_my_m)(A_0\wedge B_0)$$

是与 $A\wedge B$ 可证等价的前束范式.

4.4　一阶系统 $\mathbf{K}_{\mathscr{L}}$ 的完备性

在本节中将要给出的完备性定理表明一阶系统 $\mathbf{K}_{\mathscr{L}}$ 的语义理论与语构理论是和谐统一的. 本节证明系统 $\mathbf{K}_{\mathscr{L}}$ 的完备性所采用的方法与证明命题逻辑系统 $\mathbf{L}$ 的完备性的逻辑方法类似，也用到系统 $\mathbf{K}_{\mathscr{L}}$ 的相容的完全扩张. 由于有变元、量词和谓词，本节的证明要比 2.3.10 节中的证明复杂一些.

4.4.1　系统 $\mathbf{K}_{\mathscr{L}}$ 的扩张

定义 4.4.1　设 $\mathbf{S}$ 是一个一阶系统，$\mathbf{S}$ 由添加或改变系统 $\mathbf{K}_{\mathscr{L}}$ 的公理而得. 如果凡 $\mathbf{K}_{\mathscr{L}}$ 中的定理都是 $\mathbf{S}$ 中的定理，则称 $\mathbf{S}$ 为 $\mathbf{K}_{\mathscr{L}}$ 的**扩张**. 设 $\mathbf{S}$ 是 $\mathbf{K}_{\mathscr{L}}$ 的扩张，如果不存在公式 A 使 A 与 $\neg A$ 都是 $\mathbf{S}$ 中的定理，则称 $\mathbf{S}$ 是**相容的一阶系统**. 又，$\mathbf{S}$ 称为是**完全的**，如果对每个闭公式 A 而言，A 与 $\neg A$ 至少有一个是 $\mathbf{S}$ 中的定理.

注 4.4.1　设 $\mathbf{S}$ 是 $\mathbf{K}_{\mathscr{L}}$ 的扩张，则只是 $\mathbf{S}$ 中的定理(可能)多了，但其全体公式之集仍不变，即，仍为 $\mathscr{F}$.

命题 4.4.1　设 $\mathbf{S}$ 是相容的一阶系统，A 是一个闭公式. 如果 A 不是 $\mathbf{S}$ 中的定理，把 $\neg A$ 作为一条新公理添加到 $\mathbf{S}$ 的公理集中而得 $\mathbf{S}$ 的一个扩张 $\mathbf{S}^*$，则 $\mathbf{S}^*$ 仍是相容的一阶系统.

证明　如果 $\mathbf{S}^*$ 不相容，则有公式 B 使

$$\vdash_{\mathbf{S}^*} B \quad 与 \quad \vdash_{\mathbf{S}^*} \neg B \tag{4.4.1}$$

都成立. $\mathbf{S}^*$ 作为 $\mathbf{S}$ 的扩张自然也是 $\mathbf{K}_{\mathscr{L}}$ 的扩张，所以

$$\vdash_{\mathbf{S}^*} \neg B\to(B\to A) \tag{4.4.2}$$

成立. 由式(4.4.1)和式(4.4.2)运用两次 MP 即得

$$\vdash_{\mathbf{S}^*} A. \tag{4.4.3}$$

但 $\mathbf{S}^*$ 中的推演都可以由给 $\mathbf{S}$ 添加 $\neg A$ 而完成，所以由式(4.4.3)得

$$\neg A\vdash_{\mathbf{S}} A. \tag{4.4.4}$$

因为 $\neg A$ 是闭公式，所以由式(4.4.4)和演绎定理得

$$\vdash_{\mathbf{S}}\neg A\to A. \tag{4.4.5}$$

又，易验证$(\neg A\to A)\to A$ 是重言式的代换实例，所以由注 4.1.2(i)知

$$\vdash_S (\neg A \to A) \to A. \tag{4.4.6}$$

由式(4.4.5)和式(4.4.6)得

$$\vdash_S A.$$

这与 A 不是 $\boldsymbol{S}$ 中的定理相矛盾!

细心的读者会发现命题 4.4.1 的证明和命题 2.3.13 中相应的证明几乎完全一样,只是在运用演绎定理时这里多声明了一句"因为$\neg A$ 是闭公式".

命题 4.4.2　一阶系统 $\boldsymbol{K}_{\mathscr{L}}$ 有一个相容的完全扩张.

证明　设 $\boldsymbol{S}_0=\boldsymbol{K}_{\mathscr{L}}$,则由推论 4.1.1 知 S_0 是 $\boldsymbol{K}_{\mathscr{L}}$ 的相容扩张. 设 $A_1, A_2, \cdots$ 是 $\mathscr{L}$ 中全体闭公式组成的序列,依次作出 $\boldsymbol{K}_{\mathscr{L}}$ 的相容扩张如下:对于 $n>0$,若 $\vdash_{S_n} A_n$,则令 $\boldsymbol{S}_{n+1}=\boldsymbol{S}_n$;若 $\vdash_{S_n} A_n$ 不成立,则令 $\boldsymbol{S}_{n+1}$ 是 $\boldsymbol{S}_n$ 的由添加$\neg A_n$ 为公理所得之扩张. 由命题 4.4.1 知 $\boldsymbol{S}_n$ 是 $\boldsymbol{K}_{\mathscr{L}}$ 的相容扩张($n=1,2,\cdots$). 设 $\boldsymbol{S}_\infty$ 是把每个 $\boldsymbol{S}_n$ 中的公理都作为公理所得的一阶系统($n=0,1,2,\cdots$),则有如下结论:

(i) $\boldsymbol{S}_\infty$ 是相容的. 事实上,如果 $\mathscr{L}$ 中有公式 B 使 $\vdash_{S_\infty} B$ 与 $\vdash_{S_\infty} \neg B$ 都成立,则因为以上推演只涉及有限多条公理,所以存在自然数 m 使 $\vdash_{S_m} B$ 与 $\vdash_{S_m} \neg B$ 都成立. 这与 $\boldsymbol{S}_m$ 的相容性相矛盾!

(ii) $\boldsymbol{S}_\infty$ 是完全的. 事实上,设 A 是 $\mathscr{L}$ 中的闭公式,则有自然数 m 使 $A=A_m$. 如果 $\vdash_{S_m} A_m$ 成立,则自然 $\vdash_{S_\infty} A_m$ 成立;如果 $\vdash_{S_m} A_m$ 不成立,则 $\vdash_{S_{m+1}} \neg A_m$ 成立,从而有 $\vdash_{S_\infty} \neg A_m$ 成立. 所以 A 与$\neg A$ 之一为 $\boldsymbol{S}_\infty$ 中的定理,即,$\boldsymbol{S}_\infty$ 是完全的.

所以命题 4.4.2 成立.

在命题 4.4.2 的证明中我们没有用 Zorn 引理. 在证明命题 2.3.13 时自然也可以不用 Zorn 引理,请读者给出命题 2.3.13 的不用 Zorn 引理的证明.

4.4.2　一阶系统 $\boldsymbol{K}_{\mathscr{L}}$ 的完备性

系统 $\boldsymbol{K}_{\mathscr{L}}$ 的完备性的证明主要依赖于下面的

命题 4.4.3　设一阶系统 $\boldsymbol{S}$ 是 $\boldsymbol{K}_{\mathscr{L}}$ 的相容扩张,则一阶语言 $\mathscr{L}$ 有解释 I,使对 $\mathscr{F}$ 中的任一公式 A,

$$\text{如果} \vdash_S A,\text{那么 } I \vDash A. \tag{4.4.7}$$

基于此命题,很容易证明下面的

命题 4.4.4($\boldsymbol{K}_{\mathscr{L}}$ 的完备性定理)　$\mathscr{F}$ 中的公式 A 是系统 $\boldsymbol{K}_{\mathscr{L}}$ 中的定理当且仅当 A 是逻辑有效公式.

证明　由系统 $\boldsymbol{K}_{\mathscr{L}}$ 的可靠性定理知只需证明若公式 A 不是 $\boldsymbol{K}_{\mathscr{L}}$ 中的定理,则 A 不是逻辑有效的. 事实上,设 A 不是 $\boldsymbol{K}_{\mathscr{L}}$ 中的定理,则 A 的完全闭包 $A'=clA$ 也不是 $\boldsymbol{K}_{\mathscr{L}}$ 中的定理. 把$\neg A'$添加为新公理可得 $\boldsymbol{K}_{\mathscr{L}}$ 的一个相容扩张 $\boldsymbol{S}$. 取 $\mathscr{L}$ 的解释 I 使式(4.4.7)成立,则 $I\vDash\neg A'$,从而 $I\vDash A'$不成立,那么 A'不是逻辑有效公式,所以由命题3.2.9知 A 不是逻辑有效公式.

以下证明命题 4.4.3,为此需要若干准备:

(i) 先给出一阶语言 $\mathscr{L}$ 的扩张 $\mathscr{L}^+$，$\mathscr{L}^+$ 由给 $\mathscr{L}$ 添加新的个体常元 $b_0,b_1,b_2,\cdots$ 而得. 分别以 $\boldsymbol{S}^+$ 和 $\boldsymbol{K}^+$ 记系统 $\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{K}$ 在添加了这些新个体常元后所得的一阶系统. 设 $\mathscr{L}^+$ 中全体仅含一个自由变元的公式如下：

$$H_0(x_{i_0}),H_1(x_{i_1}),H_2(x_{i_2}),\cdots.$$

从序列 $b_0,b_1,b_2,\cdots$ 中选取子序列 $c_0,c_1,c_2,\cdots$ 如下：

(1) c_0 不在 $H_0(x_{i_0})$ 中出现.

(2) 对 $n>0,c_n\notin\{c_0,\cdots,c_{n-1}\}$，且 c_n 不在 $H_0(x_{i_0}),\cdots,H_n(x_{i_n})$ 中出现.

对每个 k，定义 G_k 如下：

$$G_k=H_k(c_k)\to(\forall x_{i_k})H_k(x_{i_k}),\quad k=0,1,2,\cdots.$$

则 G_k 是闭公式($k=0,1,2,\cdots$). 设 $\boldsymbol{S}_0=\boldsymbol{S}^+$，$\boldsymbol{S}_1$ 是在 $\boldsymbol{S}_0$ 中添加新公理 G_0 而得的系统. 对 $n>1$，设 $\boldsymbol{S}_n$ 是在 $\boldsymbol{S}_{n-1}$ 中添加新公理 G_{n-1} 而得的系统. 则

(ii) $\boldsymbol{S}_n$ 是相容的一阶系统($n=0,1,2,\cdots$).

事实上，$\boldsymbol{S}_0=\boldsymbol{S}^+$ 是相容的一阶系统，设有 $n\geqslant0$ 使 $\boldsymbol{S}_n$ 相容但 $\boldsymbol{S}_{n+1}$ 不相容，则每个公式都是 $\boldsymbol{S}_{n+1}$ 中的定理(参看注 2.3.4(iii))，特别有

$$\vdash_{S_{n+1}}\neg H_n.$$

由 $\boldsymbol{S}_{n+1}$ 的来历和上式知

$$H_n\vdash_{S_n}\neg H_n.$$

从而由演绎定理和 H_n 为闭公式得

$$\vdash_{S_n}(H_n\to\neg H_n).\tag{4.4.8}$$

由式(4.4.8)和式(2.3.31)得 $\vdash_{S_n}\neg H_n$，即

$$\vdash_{S_n}\neg(H_n(c_n)\to(\forall(x_{i_n})H_n(x_{i_n})).\tag{4.4.9}$$

又，由重言式是每个 $\boldsymbol{S}_n$ 中的定理知

$$\vdash_{S_n}\neg(H_n(C_n)\to(\forall x_{i_n})H_n(x_{i_n}))\to\neg(\forall x_{i_n})H_n(x_{i_n}),\tag{4.4.10}$$

$$\vdash_{S_n}\neg(H_n(c_n)\to(\forall x_{i_n})H_n(x_{i_n}))\to H_n(c_n).\tag{4.4.11}$$

由式(4.4.9)～式(4.4.11)得

$$\vdash_{S_n}\neg(\forall x_{i_n})H_n(x_{i_n}),\quad\vdash_{S_n}H_n(c_n).\tag{4.4.12}$$

取变元 y 使 y 不在 $H_n(c_n)$ 的证明序列中出现，则因 c_n 不在 $H_0,H_1,\cdots,H_{n-1}$ 中出现，设 $A_1,A_2,\cdots,A_m=H_n(c_n)$ 是 $H_n(c_n)$ 在 $\boldsymbol{S}_n$ 中的证明序列，任取 $A_i(i\leqslant m)$，若 A_i 为 $\boldsymbol{S}_n$ 中的公理，则 $A_i\in\{H_0,H_1,\cdots,H_{n-1}\}$ 或 A_i 为 $\boldsymbol{K}^+$ 中的公理. 对前一情形，因为 c_n 不在 $H_0,H_1,\cdots,H_{n-1}$ 中出现，将 $H_n(c_n)$ 用 $H_n(y)$ 代换不影响 A_i 为公理；在后一种情形，无论 A_i 是(K^+1)～(K^+6)中的哪一条公理，当 A_i 中含有 c_n 时将 c_n 用 y 代替仍为公理，因为 y 不在序列 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 中出现. 若 A_i 不是 $\boldsymbol{S}_n$ 中的公理，则有 $j,k<i$ 使 A_i 是 A_j 与 A_k 运用 MP 而得的结果. 这时用 y 代替 c_n 也不影响 MP 运算. 总之，用 y 代替 c_n 就从 $H_n(c_n)$ 在 $\boldsymbol{S}_n$ 中的证明序列得出 $H_n(y)$ 在 $\boldsymbol{S}_n$ 中的证明序列. 所以 $\vdash_{S_n}H_n(y)$. 由此得

$$\vdash_{S_n}(\forall y)H_n(y),\ \vdash_{S_n}(\forall x_{i_n})H(x_{i_n}). \quad (4.4.13)$$

式(4.4.12)中的第一式与式(4.4.13)中第二式相矛盾！这就证明了对每个 $n\geqslant 0$, $\boldsymbol{S}_n$ 都是相容的一阶系统.

(iii) 设 $\boldsymbol{S}_\infty$ 是以各 $\boldsymbol{S}_n(n\geqslant 0)$ 中的公理集之并为公理集所得之系统，则 $\boldsymbol{S}_\infty$ 是相容的一阶系统. 事实上，若从 $\boldsymbol{S}_\infty$ 可推出两个公式 B 与 $\neg B$，则因这种推演只涉及有限多条公理，B 与 $\neg B$ 也可用某 S_n 推出，这与 $\boldsymbol{S}_n$ 的相容性相矛盾！

以下设 T 是 $\boldsymbol{S}_\infty$ 的相容的完全扩张.

(iv) 作一阶语言 $\mathscr{L}^+$ 的解释 I^+ 如下：

(1) I^+ 的解释域 D 是 $\mathscr{L}^+$ 中的全体闭项(即，不含变元的项)组成.

(2) $\mathscr{L}^+$ 中个体常元在 D 中所对应的特定元是其自身.

(3) $\mathscr{L}^+$ 中的 n 元函数符号 f^n 被解释为 D 上的 n 元函数 $\overline{f^n}: D^n\to D$，其定义为

$$\overline{f^n}(t_1,\cdots,t_n)=f^n(t_1,\cdots,t_n),\quad t_i\in D, i=1,\cdots,n.$$

(4) $\mathscr{L}^+$ 中的 n 元谓词符号 A^n 被解释为 D 上的 n 元关系 $\overline{A^n}\subset D^n$，其定义为

$$(t_1,\cdots,t_n)\in\overline{A^n} \text{ 当且仅当 } \vdash_T A^n(t_1,\cdots,t_n). \quad (4.4.14)$$

(v) 现在可以证明下面的命题.

命题 4.4.5 设 A 是 $\mathscr{L}^+$ 中的闭公式，则

$$\vdash_T A \quad \text{当且仅当} \quad I^+\models A. \quad (4.4.15)$$

证明 关于 A 中所含连接词与量词的总个数 m 进行证明.

若 $m=0$，则 A 为原子公式. 因为 A 为闭公式，有 $t_1,\cdots,t_n\in D$ 使 $A=A^n(t_1,\cdots,t_n)$. 注意对 $\mathscr{L}^+$ 在 I^+ 中的每个赋值 v 均有 $v(t_i)=t_i(i=1,\cdots,n)$(为什么?)，所以由式(4.4.14)知式(4.4.15)成立.

设式(4.4.15)当 $m\leqslant k$ 时成立，现在 $m=k+1$.

(1) 设 $A=\neg B$，则 B 为闭公式，从而 A 关于 I^+ 为真公式等价于 B 关于 I^+ 为假公式. 由归纳假设，这等价于 B 不是 $\boldsymbol{T}$ 中的定理. 因为 $\boldsymbol{T}$ 是完全的，这又等价于 $\neg B$，即 A 是 $\boldsymbol{T}$ 中的定理.

(2) 设 $A=B\to C$，则 B 与 C 都是闭公式. 只需证明 A 关于 I^+ 为假当且仅当 A 不是 $\boldsymbol{T}$ 中的定理. 事实上，A 关于 I^+ 为假等价于 B 关于 I^+ 为真且 C 关于 I^+ 为假. 由归纳假设及 $\boldsymbol{T}$ 的完全性知这等价于 $\vdash_T B$ 且 $\vdash_T\neg C$. 这显然等价于 $\vdash_T A$ 不成立.

(3) 设 $A=(\forall x_i)B(x_i)$. 由变元代换定理知可设 x_i 不在 $B(x_i)$ 中约束出现，从而若 x_i 不是 $B(x_i)$ 的自由变元，则 $B(x_i)$ 是闭公式，从而 $A\sim B(x_i)$. 所以由归纳假设知式(4.4.15)成立. 以下设 x_i 是 $B(x_i)$ 的自由变元，则 x_i 是 $B(x_i)$ 中唯一的自由变元，所以有自然数 j 使 $B(x_i)=H_j(x_{i_j})$，即 $A=(\forall x_{i_j})H_j(x_{i_j})$. 设 $I^+\models A$，即 $I^+\models(\forall x_{i_j})H_j(x_{i_j})$，由公理(K5)以及命题 4.1.1 又有

$$I^+\models(\forall x_{i_j})H_j(x_{i_j})\to H_j(c_j),$$

所以可得出 $I^{-}\models H_j(c_j)$. 从而由归纳假设知 $\vdash_T H_j(c_j)$. 这时若 $\vdash_T A$ 不成立，则由 **T** 的完全性得 $\vdash_T \neg A$，即

$$\vdash_T \neg(\forall x_{i_j})H_j(x_{i_j}).$$

但由 G_j 为 **T** 中的定理知

$$\vdash_T \neg(\forall x_{i_j})H_j(x_{i_j})\to\neg H_j(c_j), \tag{4.4.16}$$

所以有 $\vdash_T \neg H_j(c_j)$，与 **T** 的相容性相矛盾！所以 $\vdash_T A$ 成立.

反过来，设 $\vdash_T A$ 成立但 $I^{+}\models(\forall x_{i_j})H_j(x_{i_j})$不成立，则有 $\mathscr{L}^{-}$ 在 I 中的赋值 v 不满足 $H_j(x_{i_j})$. 设 $v(x_{i_j})=d\in D$，则由解释 I 的特点知 $v(d)=d=v(x_{i_j})$. 由项的代入定理，即命题 3.2.3 知 v 不满足 $H_j(d)$. 因为 $H_j(d)$是闭公式，所以由推论 3.2.1知 $I^{+}\models\neg H_j(d)$. 但由 $\vdash_T A$，即 $\vdash_T(\forall x_{i_j})H_j(x_{i_j})$ 和公理(K5)得 $\vdash_T H_j(d)$. 由归纳假设，$I^{-}\models H_j(d)$，矛盾！所以当 $\vdash_T A$ 时 $I^{-}\models A$ 成立. 命题 4.4.5证毕.

(vi)命题 4.4.3 的证明.

证明　设 A 是 $\mathscr{F}$ 中的公式，则 A 也是关于一阶语言 $\mathscr{L}^{+}$ 的公式. 设 $\vdash_S A$ 成立，则 $\vdash_T A$ 成立，所以由命题 4.4.5 得 $I^{+}\models A$. 在 I^{+} 中删去 D 中的新添个体常元 $b_0,b_1,b_2,\cdots$及涉及这些个体常元的闭项 t，但保持函数符号及谓词符号的解释不变，则得 $\mathscr{L}$的解释 I. 由 $I^{+}\models A$ 即得 $I\models A$.

4.4.3　$\boldsymbol{K}_{\mathscr{L}}$ 的完备性定理的代数证明

基于上一节中 $\boldsymbol{K}_{\mathscr{L}}$ 的相容的完全扩张 **T**，可以给出 $\boldsymbol{K}_{\mathscr{L}}$ 的完备性定理的一个代数证明. 首先注意，设 $E(y)$是 $\mathscr{L}^{+}$ 中的含有一个自由变元的公式，则在 T 中有个体常元 b 使

$$(\forall y)E(y)\sim_T E(b). \tag{4.4.17}$$

事实上，设 $E(y)=H_j(x_{i_j})$，则 $G_j=H_j(c_j)\to(\forall x_{i_j})H_j(x_{i_j})$是 **T** 中的公理，又，由公理(K5)知相反的蕴涵式$(\forall x_{i_j})H_j)(x_{i_j})\to H_j(c_j)$也是 **T** 中的公理，所以取 $b=c_j$，则式(4.4.17)成立.

其次，设 Q 是 Boole 代数，则易证 Q 中的滤子按包含序组成的上升链之并仍为 Q 中的滤子，所以由 Zorn 引理知 Q 中有一极大滤子 β. 设 $a\vee b\in\beta$，则 $a\in\beta$ 或 $b\in\beta$. 事实上，若 $a\notin\beta,b\notin\beta$，令 $\gamma_a=\{y\in Q\mid 有\ x\in\beta 使\ a\wedge x\leqslant y\}$，$\gamma_b=\{y\in Q\mid 有\ x\in\beta 使\ b\wedge x\leqslant y\}$，则 $0\notin\gamma_a$ 或 $0\notin\gamma_b$，因为反之则有 $x_1,x_2\in\beta$ 使 $a\wedge x_1=b\wedge x_2=0$，从而 $(a\vee b)\wedge(x_1\wedge x_2)=0$，但 $a\vee b\in\beta,x_1\wedge x_2\in\beta$，所以 $0\in\beta$，矛盾！所以不妨设 $0\notin\gamma_a$，则由 $a\in\gamma_a$ 知 γ_a 是比 β 真大的滤子，仍得出矛盾. 所以 β 是 Q 中的素滤子.

以 $\mathscr{F}^{+}$ 记 $\mathscr{L}^{-}$ 中全体公式之集，以 $\sim_T$ 记 $\mathscr{F}^{+}$ 上关于一阶系统 T 而言的可证等价关系，则可像证明命题 2.3.7 一样证明$[\mathscr{F}^{+}]=\mathscr{F}^{+}/\sim_T$ 是 Boole 代数. 以$[A]$记 A 在$[\mathscr{F}^{+}]$中所在的等价类. 取$[\mathscr{F}^{+}]$中的素滤子∇，修改 $\mathscr{L}^{+}$ 的解释 I^{+} 中的式(4.4.14)为

$$(t_1,\cdots,t_n)\in\overline{A^n}\text{ 当且仅当}[A^n(t_1,\cdots,t_n)]\in\nabla,\quad (t_1,\cdots,t_n)\in D^n. \tag{4.4.18}$$

称 $\mathscr{L}^+$ 的这个解释为 I^*. 可以证明下面的结论：

命题 4.4.6　设 v 是 $\mathscr{L}^+$ 在 I^* 中的赋值，$A(x_1,\cdots,x_n)$ 是 $\mathscr{F}^+$ 中含有 n 个自由变元 $x_1,\cdots,x_n$ 的公式，则

$$v\text{ 满足 }A\quad\text{当且仅当}\quad[A(v(x_1),\cdots,v(x_n))]\in\nabla. \tag{4.4.19}$$

证明　因为 I^* 的解释域 D 由 $\mathscr{L}^+$ 中全本闭项组成，所以对 D 中任一闭项 t 和 $\mathscr{L}^+$ 在 I^* 中的任一赋值 v 均有 $v(t)=t$. 由此易看出式(4.4.19)对原子公式 A 成立. 以下关于 A 中连接词与量词的总个数归纳地证明式(4.4.19)对一般的公式 A 成立. 设式(4.4.19)对较短的公式已成立.

(i) 设 $A=\neg B(x_1,\cdots,x_n)$，则 v 满足 A 等价于 v 不满足 B，由归纳假设，这等价于 $[B(v(x_1),\cdots,v(x_n))]\notin\nabla$. 但 ∇ 为素理想，所以由

$[A(v(x_1),\cdots,v(x_n))]\vee[B(v(x_1),\cdots,v(x_n))]=[\neg B(v(x_1),\cdots,v(x_n))\vee B(v(x_1),\cdots,v(x_n))]=1\in\nabla$

知上述事实等价于 $[A(v(x_1),\cdots,v(x_n))]\in\nabla$. 所以式(4.4.19)成立.

(ii) 设 $A=B\rightarrow C$，则由归纳假设知 v 不满足 A 等价于

$$[B(v(x_1),\cdots,v(x_n))]\in\nabla\text{ 且}[C(v(x_1),\cdots,v(x_n))]\notin\nabla.$$

而这又等价于 $[A(v(x_1),\cdots,v(x_n))]\notin\nabla$. 所以式(4.4.19)成立.

(iii) 设 $A(x_1,\cdots,x_n)=(\forall z)B(z,x_1,\cdots,x_n)$，则由归纳假设知若 v 满足 A，则对每个与 v z-等价的赋值 v'

$$[B(v'(z),v(x_1),\cdots,v(x_n))]\in\nabla,\quad v'(z)\in D. \tag{4.4.20}$$

令 $E(y)=B(y,v(x_1),\cdots,v(x_n))$，在式(4.4.20)中取 $v'(z)=b$，则由式(4.4.17)得

$$[A(v(x_1),\cdots,v(x_n))]=[(\forall y)E(y)]=[E(b)]\in\nabla.$$

反过来，设 v 不满足 A，则有与 v z-等价的赋值 v' 使

$$[B(v'(z),v(x_1),\cdots,v(x_n))]\notin\nabla. \tag{4.4.21}$$

注意这时 $v'(z)\in D$ 从而 $v'(z)$ 不含变元，则由公理(K5)知 $(\forall z)B(z,v(x_1),\cdots,v(x_n))\rightarrow B(v'(z),v(x_1),\cdots,v(x_n))$ 是 $\boldsymbol{T}$ 中的定理，从而

$$[A(v(x_1),\cdots,v(x_n))]\leqslant[B(v'(z),v(x_1),\cdots,v(x_n))]. \tag{4.4.22}$$

由式(4.4.21)与式(4.4.22)即得 $[A(v(x_1),\cdots,v(x_n))]\notin\nabla$.

推论 4.4.1　设 A 是 $\mathscr{L}^+$ 中的闭公式，则

$$\vdash_T A\quad\text{当且仅当}\quad I^*\models A. \tag{4.4.23}$$

证明　设 A 为 $\mathscr{L}^+$ 中的闭公式，则 A 不含自由变元，所以由命题 4.4.6 知对 $\mathscr{L}^+$ 在 I^* 中的任一赋值 v，v 满足 A 当且仅当 $[A]\in\nabla$. 因为 $\boldsymbol{T}$ 是相容的完全的一阶系统，对任一闭公式 A 而言，$[A]=1\in\nabla$ 或 $[\neg A]=1\in\nabla$ 有一个且仅有一个成立，所以 A 为定理等价于 $[A]\in\nabla$，这也就等价于每个赋值 v 均满足 A，即，$I^*\models A$. 这就证明了式(4.4.23).

由推论 4.4.1 即可像 4.4.2 节中一样证明 $\boldsymbol{K}_y$ 的完备性定理.

注 4.4.2 (i) 式(4.4.17)在本节证明 $\boldsymbol{K}_y$ 的完备性时起着关键的作用. 这一公式在上一节命题 4.4.5 的证明(iii)中虽未明确提出,但在公理(K5)的基础上引用式(4.4.16)实际上已使用了式(4.4.17). 所以式(4.4.17)在 4.4.3 节中证明系统 $\boldsymbol{K}_y$ 的完备性时起着关键的作用.

(ii) 设 $E(y)$是系统 $\boldsymbol{K}_y$ 中仅含一个自由变元的公式,则由公理(K5)知对任一个体常元 a,$(\forall y)E(y)\rightarrow E(a)$都是定理. 但在 $\boldsymbol{K}_y$ 中不能保证有个体常元 b 使 $E(b)\rightarrow(\forall y)E(y)$是定理,因为它不是逻辑有效公式. 所以式(4.4.17)在 $\boldsymbol{K}_y$ 中不成立. 比如,考虑 $\mathscr{L}$ 的自然数解释 I_N,设 A_1^2 被解释为相等关系,$E(y)=A_1^2(a,y)$. 这时 $\mathscr{L}$ 中只有一个个体常元 a,所以 $E(b)$只能是 $A_1^2(a,a)$,按 $\mathscr{L}$ 的解释 I_N,$E(b)$是真公式. 但$(\forall y)E(y)$显然不真. 所以 $E(b)\rightarrow(\forall y)E(y)$不是逻辑有效公式. 不过如果 $\mathscr{L}$ 中还有异于 a 的个体常元 b,且使 b 的特定元 $\bar{b}=5$,则在解释 I_N 之下 $E(b)$为假公式,从而 $E(b)\rightarrow(\forall y)E(y)$为真公式. 由此可看出在 4.4.2 节中为什么要给 $\mathscr{L}$ 添加个体常元 $c_0,c_1,c_2,\cdots$ 以及为什么要添加形如 $G_k=H_k(c_k)\rightarrow(\forall x_{i_k})H_k(x_{i_k})$ $(k=0,1,2,\cdots)$的公式为新公理的原因所在了.

习 题 4.4

1. 设 $A(x)$是含有自由变元 x 的公式. 举例说明当 t 不是关于 $A(x)$中的 x 自由的项时

$$\vdash(\forall x)A(x)\rightarrow A(t)$$

不必成立.

2. 设～是 $\mathscr{F}$ 上的可证等价关系,则由命题 4.2.3 知～是 $\mathscr{F}$ 上关于$\neg,\rightarrow,\vee,\wedge,(\forall x_i)$而言的同余关系,可证$[\mathscr{F}]=\mathscr{F}/\sim$构成 Boole 代数,这里在$[\mathscr{F}]$中

$$[A]\leqslant[B]\text{当且仅当}\vdash A\rightarrow B \quad [A]'=[\neg A].$$

设 $A(x)$是 $\mathscr{F}$ 中含有自由变元 x 的公式,$\mathscr{T}^*$ 是若干个项组成之集,含有无穷多个变元,且对 $\mathscr{T}^*$ 中的项 t,t 关于 $A(x)$中的 x 自由. 试证

(i) 在$[\mathscr{F}]$中

$$[(\forall x)A(x)]=\inf\{[A(t)]\mid t\in\mathscr{T}^*\}.$$

(ii) 在$[\mathscr{F}]$中

$$[(\exists x)A(x)]=\sup\{[A(t)]\mid t\in\mathscr{T}^*\}.$$

3. 设 $A\in\mathscr{F}$,$\Gamma\subset\mathscr{F}$用符号 $\Gamma\vDash A$ 表示,如果 $\mathscr{L}$ 的解释 I 满足 Γ 中的每个公式时 I 也满足 A,并称 I 为 Γ 的模型. 设 Γ 是有限的闭公式之集,试证

$$\Gamma\vDash A \quad\text{当且仅当}\quad \Gamma\vdash A.$$

4. 设 $A,C\in\mathscr{F}$,如果 $\vdash\neg A$ 且$\{C\}\vdash\neg A$,试证 $\vdash\neg C$. 这里 C 不必为闭公式.

5. 设 S 是一阶系统,I 是 $\mathscr{L}$ 的一个解释. 试证:如果对 S 中每个公理 A 均有 $I\vDash A$,则对 S 中的每个定理 B 均有 $I\vDash B$. 这时称 I 为 S 的一个模型.

6. 试证一阶系统 S 是相容的当且仅当 S 有一个模型.

7. 设 S 是相容的一阶系统且闭公式 A 在 S 的每个模型中都是真的,试证 $\vdash_S A$.

8. 设 Γ 是 $\mathscr{F}$ 的无限子集. 试证 Γ 有一个模型当且仅当 Γ 的每个有限子集都有模型.

4.5　不含量词的公式*

以下用 $\mathscr{F}_0$ 表示全体不含量词的公式之集.

4.5.1　赋值在项处的值

设 I 是一阶语言 $\mathscr{L}$ 的一个解释, v 是 $\mathscr{L}$ 在 I 中的一个赋值, 则 v 是从项集 $\mathscr{T}$ 到解释域 D_I 的一个映射 $v:\mathscr{T}\to D_I$, 满足条件

(i) $v(a_i)=\overline{a_i}$, a_i 是 $\mathscr{L}$ 中的个体常元, $\overline{a_i}$ 是 D_I 中与 a_i 相对应的特定元.

(ii) $v(f_i^n(t_1,\cdots,t_n))=\overline{f_i^n}(v(t_1),\cdots,v(t_n))$, $\overline{f_i^n}$ 是 $\mathscr{L}$ 中 n 元函数符号 f_i^n 的解释.

前面讲过, 由以上两条可知赋值 v 由它在变元符号集 $X=\{x_1,x_2,\cdots\}$ 上的值完全确定, 因为每个赋值在个体常元处的值已经固定, 不随赋值的改变而改变, 所以由(ii)知 v 由 $v|X$ 完全确定.

以 C 记 $\mathscr{L}$ 中个体常元之集, 以下设 $X\cup C=\{\eta_1,\eta_2,\cdots\}$, 即 η_i 可能是一个变元符号, 也可能是一个个体常元($i=1,2,\cdots$), 称 η_i 为 η-元.

定义 4.5.1　(i) 称 $X\cup C$ 中的元为 1 级项.

(ii) 设 $t_1,\cdots,t_n$ 为不超过 k 级的项, 且其中至少有一个 k 级项, 则称 $f_i^n(t_1,\cdots,t_n)$ 为 $k+1$ 级项, 这里 f_i^n 是 $\mathscr{L}$ 中的 n 元函数符号($k=1,2,\cdots$).

定义 4.5.2　设 I 是一阶语言 $\mathscr{L}$ 的一个解释, v 是 $\mathscr{L}$ 在 I 中的一个赋值, t 是项, 则 $v(t)$ 的值可以通过 v 在各 η_i 处的值用一个函数 $\bar{t}$ 来表达:

(i) 设 t 是 1 级项 η_i, 则 $v(t)=\bar{t}(v(\eta_i))=v(\eta_i)$.

(ii) 设 t 是 2 级项 $f_i^n(\eta_1,\cdots,\eta_n)$, 则 $v(t)=\bar{t}(v(\eta_1),\cdots,v(\eta_n))=\overline{f_i^n}(v(\eta_1),\cdots,v(\eta_n))$.

设对于不超过 k 级的项 t, 函数 $\bar{t}$ 已定义. 今 $t=f_i^n(t_1,\cdots,t_n)$ 是 $k+1$ 级项, 这里 t_i 是不超过 k 级的项, 且 t_i 中出现的 η-元为 $\eta_{i1},\cdots,\eta_{im_i}$ ($i=1,2,\cdots n$). 将 t 中出现的全部 η-元之集

$$\bigcup\{\{\eta_{i1},\cdots,\eta_{im_i}\}\mid i=1,\cdots,n\}$$

简记为 $\{\eta_1,\cdots,\eta_m\}$, 即

$$\{\eta_1,\cdots,\eta_m\}=\bigcup\{\{\eta_{i1},\cdots,\eta_{im_i}\}\mid i=1,\cdots,n\},\tag{4.5.1}$$

则

$$\begin{aligned}v(t)&=\bar{t}(v(\eta_1),\cdots,v(\eta_m))\\&=\overline{f_i^n}(\overline{t_1}(v(\eta_{11}),\cdots,v(\eta_{1m_1})),\cdots,\overline{t_n}(v(\eta_{n1}),\cdots,v(\eta_{nm_n})))\quad(n=2,3,\cdots).\end{aligned}$$

例 4.5.1　(i) 设 $t=f_1^2(f_1^3(\eta_1,\eta_2,f_1^2(\eta_1,\eta_3)),f_1^1(\eta_1))$, 则 t 是 4 级项,

$v(t)=\bar{t}(v(\eta_1),v(\eta_2),v(\eta_3))$

$=\overline{f_1^2}(\overline{f_1^3}(v(\eta_1),v(\eta_2),\overline{f_1^2}(v(\eta_1),v(\eta_3))),\overline{f_1^1}(v(\eta_1)))$.

(ii) 承上，设 $\eta_1=a_1$ 为个体常元，η_2 与 η_3 分别是变元符号 x_1 与 x_2，则

$v(t)=\bar{t}(\overline{a_1},v(x_1),v(x_2))$

$=\overline{f_1^2}(\overline{f_1^3}(\overline{a_1},v(x_1),\overline{f_1^2}(\overline{a_1},v(x_2))),\overline{f_1^1}(\overline{a_1}))$.

(iii) 承上，设 u 是 $\mathscr{L}$ 在 I 中的另一赋值，则

$u(t)=\bar{t}(\overline{a_1},u(x_1),u(x_2))$

$=\overline{f_1^2}(\overline{f_1^3}(\overline{a_1},u(x_1),\overline{f_1^2}(\overline{a_1},u(x_2))),\overline{f_1^1}(\overline{a_1}))$.

注 4.5.1 (i) 当赋值 v 在各变元符号 x_i 处的值已定时，它在各 η-元处的值也就确定了. 由上例(i)看出，设 t 是 k 级项，则 v 在 t 处的值 $v(t)$ 可以由 v 在 t 中各 η-元处的值(即 v 在各 1 级项处的值)依次通过有关函数求出 v 在 2 级项处的值，3 级项处的值，……，而最后求出. 但归根结底 $v(t)$ 的值只依赖于 v 在 t 中各 η-元处的值，所以如果不关心中间环节，就可以把 $v(t)$ 写为 $\bar{t}(v(\eta_1),\cdots,v(\eta_m))$. 这正是定义 4.5.2 的用意所在，它归纳地给出了复合函数 $\bar{t}$ 的构造.

(ii) 由上例(ii)与(iii)看出，在计算 $v(t)$ 时对 t 中的个体常元可以不再列出，以个体常元 a_1 为例，不论赋值 v 还是赋值 u，在 a_1 处的值总是 $\overline{a_1}$. 这正是 v 和 u 分别由 $v|X$ 与 $u|X$ 决定的意义所在. 在上例(ii)和(iii)中分别有

$$v(t)=\bar{t}(\overline{a_1},v(x_1),v(x_2))\text{和 } u(t)=\bar{t}(\overline{a_1},u(x_1),u(x_2)).$$

可见对不同的赋值 $v,u,\cdots$ 计算 $v(t),u(t),\cdots$ 时 $\bar{t}$ 中与个体常元相对应的特定元也可以略去不写，这样对上例而言就可以写成

$$v(t)=\bar{t}(v(x_1),v(x_2)),\quad u(t)=\bar{t}(u(x_1),u(x_2)).$$

4.5.2 赋值满足公式的一种简化写法

设 I 是 $\mathscr{L}$ 的一个解释，v 是 $\mathscr{L}$ 在 I 中的一个赋值. 在注 3.2.3 中曾经指出，可以分别由 $v(A)=1$ 和 $v(A)=0$ 表示 v 满足公式 A 和 v 不满足公式 A. 特别是对不含量词的公式也如此. 所以当 v 确定以后，就有一个二值函数 $v:\mathscr{F}_0\to\{0,1\}$，满足

$$v(A)=\begin{cases}1, & \text{若 } v \text{ 满足 } A,\\ 0, & \text{若 } v \text{ 不满足 } A.\end{cases}\qquad A\in\mathscr{F}_0. \tag{4.5.2}$$

由式(4.5.2)易证 $v(\neg B)=1-v(B)$，$v(B\to C)=1$ 当且仅当 $v(B)\leqslant v(C)$.

定义 4.5.3 (i) 设 A 为原子公式 $A_i^n(t_1,\cdots,t_n)$，$\eta_1,\cdots,\eta_m$ 是在 A 中出现的全部 η-元，$\eta_{i1},\cdots,\eta_{im_i}$ 是在 t_i 中出现的全部 η-元，则式(4.5.1)成立. 规定

$$\overline{A}(v(\eta_1),\cdots,v(\eta_m))=\overline{A_i^n}(\overline{t_1}(v(\eta_{11}),\cdots,v(\eta_{1m_1})),\cdots,\overline{t_n}(v(\eta_{n1},\cdots,v(\eta_{nm_n})))). \tag{4.5.3}$$

(ii) 设 $A=\neg B$，这里 $B=B(\eta_1,\cdots,\eta_m)\in\mathscr{F}_0$，$\eta_1,\cdots,\eta_m$ 是在 B 中出现的全部 η-元，且 $\overline{B}(v(\eta_1),\cdots,v(\eta_m))$ 已定义，则规定

$$\overline{A}(v(\eta_1),\cdots,v(\eta_m))=1-\overline{B}(v(\eta_1),\cdots,v(\eta_m)). \tag{4.5.4}$$

(iii) 设 $A=B\to C$，这里 $B=B(\eta_1,\cdots,\eta_m)\in\mathscr{F}_0$，$C=C(\xi_1,\cdots,\xi_l)\in\mathscr{F}_0$，$\eta_1,\cdots,\eta_m$ 和 $\xi_1,\cdots,\xi_l$ 分别是在 B 和 C 中出现的全部 η-元，设 $\zeta_1,\cdots,\zeta_n$ 是在 A 中出现的全部 η- 元，即

$$\{\zeta_1,\cdots,\zeta_n\}=\{\eta_1,\cdots,\eta_m\}\cup\{\xi_1,\cdots,\xi_l\},$$

则规定

$$\overline{A}(v(\zeta_1),\cdots,v(\zeta_n))=1 \text{ 当且仅当 } \overline{B}(v(\eta_1),\cdots,v(\eta_m))\leqslant\overline{C}(v(\xi_1),\cdots,v(\xi_l)). \tag{4.5.5}$$

由定义 4.5.3 知对 $\mathscr{F}_0$ 中任一公式 $A(\eta_1,\cdots,\eta_m)$，这里 $\eta_1,\cdots,\eta_m$ 是在 A 中出现的全部 η-元，$\overline{A}(v(\eta_1),\cdots,v(\eta_m))$已有定义，其值非 1 即 0.

注意，当公式 A 和赋值 v 确定之后，$v(A)$就表示一个命题，$v(A)=1$ 或 $v(A)=0$ 分别表示该命题为真或为假，这可从后面的例 4.5.2 清楚地看出来.

命题 4.5.1 设 I 是一阶语言 $\mathscr{L}$ 的一个解释，v 是 $\mathscr{L}$ 在 I 中的一个赋值，$A(\eta_1,\cdots,\eta_m)\in\mathscr{F}_0$，$\eta_1,\cdots,\eta_m$ 是在 A 中出现的全部 η-元，则

$$v(A)=\overline{A}(v(\eta_1),\cdots,v(\eta_m)). \tag{4.5.6}$$

证明 (i) 设 A 为原子公式 $A_i^n(t_1,\cdots,t_n)$，则由

$$v(t_1)=\overline{t_1}(v(\eta_{11}),\cdots,v(\eta_{1m1})),\cdots,v(t_n)=\overline{t_n}(v(\eta_{n1},\cdots,v(\eta_{nm_n}))$$

知式(4.5.3)右边等于$\overline{A_i^n}(v(t_1),\cdots,v(t_n))$. 所以由式(4.5.2)，式(4.5.3)以及赋值 v 满足公式 A 的定义知式(4.5.6)成立.

(ii) 设 $A=\neg B$，这里 $B=B(\eta_1,\cdots,\eta_m)\in\mathscr{F}_0$，$\eta_1,\cdots,\eta_m$ 是在 B 中(从而也是在 A 中)出现的全部 η-元，且已证 $v(B)=\overline{B}(v(\eta_1),\cdots,v(\eta_m))$，则由 $v(A)=1-v(B)$ 和式(4.5.4)得

$$v(A)=1-v(B)=1-\overline{B}(v(\eta_1),\cdots,v(\eta_m))=\overline{A}(v(\eta_1),\cdots,v(\eta_m)),$$

即式(4.5.6)对 A 仍成立.

(iii) 设 $A=B\to C$，这里 B 与 C 同定义 4.5.3(ii)，且设已证

$$v(B)=\overline{B}(v(\eta_1),\cdots,v(\eta_m)),\quad v(C)=\overline{C}(v(\xi_1),\cdots,v(\xi_l)), \tag{4.5.7}$$

则由 $v(A)=1$ 当且仅当 $v(B)\leqslant v(C)$ 和式(4.5.7)，式(4.5.5)知

$$\begin{aligned} v(A)=1 \quad &\text{当且仅当} \quad \overline{B}(v(\eta_1),\cdots,v(\eta_m))\leqslant\overline{C}(v(\xi_1),\cdots,v(\xi_l)) \\ &\text{当且仅当} \quad \overline{A}(v(\zeta_1),\cdots,v(\zeta_n))=1, \end{aligned}$$

即式(4.5.6)对 A 仍成立，只需将 $\eta_1,\cdots,\eta_m$ 换为 $\zeta_1,\cdots,\zeta_n$ 即可.

由以上(i)～(iii)知式(4.5.6)成立.

注 4.5.2 (i) 表达式(4.5.6)是在解释 I 已确定的条件下得出的，所以 $\overline{A}$ 的结构式是随解释 I 的改变而改变的，因为当映射 $v:X\to D_I$ 给定后，v 在一个项 t 处的值是随函数符号的解释的改变而改变的. 所以式(4.5.6)的更准确的写法应当是

$$v(A)=\overline{A_I}(v(\eta_1),\cdots,v(\eta_m)).\qquad(4.5.8)$$

只是在当 I 已确定时往往把$\overline{A_I}$中的下标 I 略去不写.

(ii) 与注 4.5.1(ii)类似,当解释 I 已知时式(4.5.6)中的某 η_i 若为个体常元,则可略去不写,因为这时任何赋值在这个个体常元处的值已经固定,不随赋值的变化而变化.所以对于不含量词的公式 A 而言,对于给定的赋值 v 求 $v(A)$时只需明确 A 中所含的全体变元符号即可,比如,$x_1,\cdots,x_n$ 是在 A 中出现的全体变元符号,则 $v(A)$是关于 $v(x_1),\cdots,v(x_n)$的二值函数,仍以 $\overline{A}$ 记此函数,则有

$$v(A)=\overline{A}(v(x_1),\cdots,v(x_n)).\qquad(4.5.9)$$

式(4.5.9)可以看作是将式(4.5.6)中某些 $v(\eta_i)$不明确写出而得的表达式,这里 η_i 为个体常元.如果 A 中连一个变元符号都没有,则对 $\mathscr{L}$ 在解释 I 的每个赋值 v 而言,$v(A)$都是同一个值(1 或 0).又,由式(4.5.9)看出,赋值 v 在不在 A 中出现的各变元 $x_{n+1},x_{n+2},\cdots$处的值不影响 $v(A)$的计算.

(iii) 设 $A(x_1,\cdots,x_n)\in\mathscr{F}_0$,这里 $x_1,\cdots,x_n$ 是在 A 中出现的全部变元符号,并设 $\mathscr{L}$ 的解释 I 已定,则对 D_I 中任意 n 个元 $\overline{a_1},\cdots,\overline{a_n}$而言 $\overline{A}(\overline{a_1},\cdots,\overline{a_n})$有意义,它表示满足条件 $v(x_i)=\overline{a_i}(i=1,\cdots,n)$的赋值 v 在 $A(x_1,\cdots,x_n)$处的值,即 $\overline{A}(\overline{a_1},\cdots,\overline{a_n})=v(A(x_1,\cdots,x_n))=\overline{A}(v(x_1),\cdots,v(x_n))$.

例 4.5.2 (i) 设 $A(x_1,x_2)$为 $A_1^2(f_1^2(x_1,a),f_2^2(x_2,f_1^1(x_1)))$,且 $\mathscr{L}$ 的解释为整数解释,其中$\overline{A_1^2}$为小于关系,$\overline{f_1^2}$与$\overline{f_2^2}$分别表示加法与减法,$\overline{f_1^1}$表示后继(加 1)函数.在此解释下 $A(x_1,x_2)$表示“$x_1+0<x_2-(x_1+1)$”.这时对任一赋值 v,$v(A)$表示一个不等式“$v(x_1)+v(a)<v(x_2)-(v(x_1)+1)$”.用 $\overline{A}(v(x_1),v(x_2))$记此不等式,则当 $v(x_1)=1,v(x_2)=2$ 时 $\overline{A}(v(x_1),v(x_2))=\overline{A}(1,2)$不成立,因为它表示“$1+0<2-(1+1)$”,所以 $v(A)=0$.但如果 $v(x_1)=1,v(x_2)=5$,则 $\overline{A}(1,5)$成立,因为它表示“$1+0<5-(1+1)$”所以 $v(A)=1$.

(ii) 设 A 为 $A_1^2(f_1^1(a),f_2^2(f_1^1(a),a))$,则 A 中不含变元符号.设 $\mathscr{L}$ 的解释 I 为自然数解释,$\overline{A_1^2}$为相等关系,$\overline{f_1^1}$为后继函数,$\overline{f_2^2}$为乘法,则在此解释之下上述原子公式表示“$0+1=(0+1)\times 0$”.它显然不成立.这时无论 v 是 $\mathscr{L}$ 中何种解释,恒有 $v(A)=0$.

(iii) 设 A 为

$$A_1^3(f_1^2(x_1,a_1),f_1^1(a_2),f_1^1(f_1^1(x_1)))\to\neg A_1^2(x_1,a_2).$$

I 是 $\mathscr{L}$ 的这样的解释:$D_I=\mathbf{R}$,$\overline{A_1^3}=\{(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbf{R}^3\mid\alpha<\beta<\gamma\}$,$\overline{A_1^2}$为小于关系,$\overline{f_1^2}$为乘法,$\overline{f_1^1}$为后继函数,且 $\mathscr{L}$ 中的个体常元 a_1 与 a_2 分别对应于 $\mathbf{R}$ 中的 0 与 1.设 v 是 $\mathscr{L}$ 在 I 中的任一赋值,则 $v(A)=\overline{A}(v(x_1))$表示

$$“v(x_1)\times v(a_1)<v(a_2)+1<v(x_1)+1+1”\to“v(x_1)\not<v(a_2)”,\qquad(4.5.10)$$

即

$$“v(x_1)\times 0<2<v(x_1)+2”\to“v(x_1)\not<1”. \tag{4.5.11}$$

若 $v(x_1)=3$，则 $\overline{A}(v(x_1))=\overline{A}(3)$ 为“$0<2<5$”$\to$“$3\not<1$”. 此蕴涵式显然成立，所以 $v(A)=\overline{A}(3)=1$. 若 $v(x_1)=0.5$，则 $\overline{A}(0.5)$ 为“$0<2<2.5$”$\to$“$0.5\not<1$”. 此蕴涵式不成立，所以 $v(A)=\overline{A}(0.5)=0$. 在本例中如果不略去 $v(a_1)$ 与 $v(a_2)$，则式(4.5.10)可用 $\overline{A}(v(a_1),v(a_2),v(x_1))$ 表示. 但因 $v(a_1)=0$ 与 $v(a_2)=1$ 不随 v 而改变，所以式(4.5.10)成为式(4.5.11)，从而可以用 $\overline{A}(v(x_1))$ 去表示. 这正像一个带参数 λ_1,λ_2 的表达式 $\varphi(\lambda_1,\lambda_2,x)$ 当 λ_1 与 λ_2 已固定时也可简写为 $\varphi(x)$ 一样.

4.5.3 $\mathscr{F}_0$ 中公式的析取范式与合取范式

因为 $\mathscr{L}$ 中的符号是可数的，且公式是有限的符号串，所以全体公式之集是可数集，特别是 $\mathscr{F}_0$ 以及 $\mathscr{F}_0$ 中原子公式之集是可数集. 以下用 $Q=\{q_1,q_2,\cdots\}$ 记 $\mathscr{F}_0$ 中全体原子公式之集，则 $\mathscr{F}_0$ 可描述如下：

(i) $Q\subset\mathscr{F}_0$.

(ii) 若 $A,B\in\mathscr{F}_0$，则 $\neg A,A\to B\in\mathscr{F}_0$.

(iii) $\mathscr{F}_0$ 中的公式都可由(i)与(ii)得出.

换句话说，$\mathscr{F}_0$ 是 Q 生成的 $(\neg,\to)$ 型自由代数. 像在命题演算系统 $\boldsymbol{L}$ 中一样，称有限个原子公式或其否定式的合(析)取为简单合(析)取式，称有限个简单合(析)取式的析(合)取为析取范式(合取范式). 在 $\boldsymbol{L}$ 中已证明每个公式都逻辑等价于一个析取范式，也逻辑等价于一个合取范式(参看注 2.2.4). 以下证明 $\mathscr{F}_0$ 中的每个公式都可证等价于一个析取范式，也可证等价于一个合析范式. 以前者为例证明.

设 $A=A(q_1,\cdots,q_n)\in\mathscr{F}_0$，这里 $q_1,\cdots,q_n$ 是 A 中出现的全部原子公式. 设 $S=\{p_1,p_2,\cdots,p_n\}$ 是命题演算系统 $\boldsymbol{L}$ 中的原子公式，以 p_i 代换 A 中的 $q_i(i=1,\cdots,n)$，则得一 $\boldsymbol{L}$ 中的公式，记作 A^*，即 $A^*=A^*(p_1,\cdots,p_n)\in F(S)$. 这时 $F(S)$ 中有和 A^* 逻辑等价的析取范式 $B^*=B^*(p_1,\cdots,p_n)$. 那么 $A^*\to B^*$ 与 $B^*\to A^*$ 都是重言式. 把 B^* 中的 p_i 再换回为 $q_i(i=1,\cdots,n)$，则得 $\mathscr{F}_0$ 中的一个析取范式 $B=B(q_1,\cdots,q_n)$. 显然 $A\to B$ 与 $B\to A$ 分别是 $\boldsymbol{L}$ 中的重言式 $A^*\to B^*$ 与 $B^*\to A^*$ 的代换实例，从而都是 $\mathscr{F}_0$ 中的逻辑有效公式. 所以由一阶系统的完备性定理知 $A\to B$ 与 $B\to A$ 都是定理，这就证明了 A 可证等价于析取范式 B. 从而下述命题成立：

命题 4.5.2 $\mathscr{F}_0$ 中的每个公式都可证等价于(从而也逻辑等价于)一个析(合)取范式.

习 题 4.5

1. 设 I 是一阶语言 $\mathscr{L}$ 的一个解释，v 是 $\mathscr{L}$ 在 I 中的一个赋值. 对于以下的项 t，写出 $v(t)$ 的依赖于变量 $v(x_i)$ 的函数表达式 $\bar{t}$ 来：

(i) $t=f_1^2(f_1^3(x_1,x_2,a_1),f_1^2(x_1,x_2))$.

(ii) $t=f_1^3(a_1,f_1^1(a_2),f_2^3(x_1,a_1,a_2))$.

2. 设 I 是一阶语言 $\mathscr{L}$ 的一个解释，v 是 $\mathscr{L}$ 在 I 中的一个赋值，对于以下的公式 A，写出 $v(A)$ 的表达式，并把它写成 $\overline{A}$ 依赖于变量 $v(x_i)$ 的形式：

(i) $A=A_1^3(f_1^1(x_1),f_1^2(x_1,a_1),f_2^2(x_1,x_2))$.

(ii) $A=A_1^2(f_1^3(x_1,x_2,x_3),f_1^1(a_1))\to\neg A_2^2(x_1,f_1^1(x_2))$.

3. 对于 $\mathscr{L}$ 的以下解释 I 和赋值 v，检验对于第 2 题(i)中的公式 A 而言，$v(A)$ 是否为真命题，即 $v(A)=1$ 是否成立：

(i) $D_I=\mathbf{Z}$，$\overline{a_1}=5$，$\overline{A_1^3}=\{(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbf{Z}^3\mid\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma\}$，$\overline{f_1^1}$ 为平方函数，$\overline{f_1^2}$ 为加法函数，$\overline{f_2^2}$ 为乘法函数，且 $v(x_1)=2$，$v(x_2)=3$.

(ii) 解释 I 同(i)，$v(x_1)=-1$，$v(x_2)=-4$.

4. 对于 $\mathscr{L}$ 的以下解释 I 和赋值 v，检验对于第 2 题(ii)中的公式 A 而言，$v(A)=1$ 是否成立：

(i) $D_I=\{2,3,\cdots\}$，$\overline{a_1}=3$，$\overline{A_1^2}$ 为相等关系，$\overline{A_2^2}$ 为小于关系，$\overline{f_1^3}$ 为连加函数，$\overline{f_1^1}$ 为平方函数，$v(x_1)=2$，$v(x_2)=v(x_3)=3$.

(ii) 解释 I 同(i)，$v(x_1)=v(x_2)=v(x_3)=3$.

5. 化 $(\neg A_1^2(x_1,a_1)\to A_1^1(x_2))\to\neg(A_1^3(x_1,x_2,x_3)\to A_1^1(x_2))$ 为析取范式.

第 5 章 Skolem 标准形与 Herbrand 定理

5.1 引 言

自动推理与定理机器证明是人工智能领域的重要研究课题，而归结原理是使自动推理和定理机器证明得以实现的推理方法之一. 归结原理(resolution principle)是 J. A. Robinson 于 1965 年提出的，当时被认为是人工智能领域的重大突破. 但由于计算量往往大得难于实现，所以人们又提出了许多新的方法加以改进，不过作为一种推理方法，归结原理有其理论上的重要价值. 本章先来讲述与归结原理有关的预备知识，即，Skolem 标准形与 Herbrand 定理，下一章讲述归结原理.

归结原理是建立在子句(clause)理论的基础上的. 在本节中我们先纲要式地讲清楚子句理论的来龙去脉及其与归结原理的关系，然后从 5.2 节开始逐一论述上述纲要中所涉及的逻辑演算理论.

5.1.1 自动推理的一种形式及其实现方法

由若干个前提条件推出一个结论是最常见的推理形式. 本章要讲述的自动推理就属于这种形式，即，已知 $A_1,\cdots,A_n$，求证 B. 用逻辑语言写出来就是：求证

$$A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \to B$$

是定理，或试证

$$\vdash A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \to B. \tag{5.1.1}$$

式(5.1.1)中的符号 $\vdash$ 下面我们没有标注 $\boldsymbol{L}$ 或 $\boldsymbol{K}$. 但不论是在命题演算系统还是在谓词演算系统，都可以利用完备性定理证明式(5.1.1)等价于

$$\models A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \to B. \tag{5.1.2}$$

即，在命题演算系统的情形为证明式(5.1.1)成立可证明 $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \to B$ 是重言式，而在谓词演算系统则应证明 $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \to B$ 是逻辑有效公式，或者等价地证明其否定

$$\neg(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \to B)\text{，也即}\quad A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \wedge \neg B \tag{5.1.3}$$

为矛盾式.

在命题逻辑中，因为 $A_1,\cdots,A_n$ 与 B 中只涉及有限多个原子公式 $p_1,\cdots,p_m$，对这 m 个原子公式进行赋值只有 2^m 种不同的方法，所以至多通过 2^m 次试验即可判定式(5.1.3)是否为矛盾式. 这就是我们在第 2 章中所说的命题逻辑的可判定性. 但在谓词逻辑中情况要复杂得多. 首先是因为有量词的出现，其次，为证明一个公式

A 是矛盾式应当对 $\mathscr{L}$ 的每一种解释(这种解释的全体已经超出了集合的范围)下的每一个赋值 v 证明 v 不满足 A. 而这一点一般是办不到的. 换句话说,在谓词逻辑中,不一定有一个有效的方法可以在有限步之内证明式(5.1.1). 所以说在谓词逻辑中一个公式是否为定理是不可判定的.

5.1.2 Skolem 变形

上面已经说过,式(5.1.1) 成立当且仅当式(5.1.3) 是矛盾式. 把式(5.1.3) 简记为 A,那么公式(5.1.1) 是否成立取决于 A 是否为矛盾式. 而这是很难验证的. Skolem 变形的基本思想是:把 A 变形为另一个公式 A^*,满足条件

(i) A^* 与 A 并不一定是逻辑等价的,但 A 为矛盾式当且仅当 A^* 为矛盾式.

(ii) A^* 是 Π_1 - 型前束范式,即 A^* 具有如下形式

$$(\forall x_1)\cdots(\forall x_k)C, \tag{5.1.4}$$

这里 $C \in \mathscr{F}_0$,即 C 不含量词.

由条件(i) 知如果能证明 A^* 是矛盾式,则 A 就是矛盾式,从而就证明了式(5.1.1).

(iii) 为证明式(5.1.4) 是矛盾式,可等价地证明对 $\mathscr{L}$ 的每个解释 I,$I \models C$ 都不成立(见引理 5.3.1).

注意,式(5.1.4) 为矛盾式,并不等价于 C 是矛盾式. C 的方便处在于它不含量词,Herbrand 定理也正是针对这种不含量词的公式而建立的.

5.1.3 可数模型与 Herbrand 定理

设 C 是不含量词的公式,要证明对 $\mathscr{L}$ 的每一个解释 I,$I \models C$ 都不成立也是难以实现的. 如果能找到具有同一个可数论域的一类解释 $\mathscr{S}$,使得只要能够证明对 $\mathscr{S}$ 中的每个解释 I^* 都有 $I^* \models C$ 不成立,就可推得对 $\mathscr{L}$ 的每个解释 I 都有 $I \models C$ 不成立,那问题就简化了许多. 我们在后面就要引入所谓正则函数系统的概念来制作具有可数论域的解释类 $\mathscr{S}$. 作为特殊情形,Herbrand 域及其对应的函数系统最为方便,我们称之为 Herbrand 解释,但 Herbrand 解释只是一种半解释,因为谓词符号还有待解释.

在实际操作上,要先把 C 化成合取范式,并令 S 表示这个合取范式中的析取项之集,称每一项为一个子句. 可见 S 是一个有限的子句集. 这时对 $\mathscr{L}$ 的任一解释 I,也把 $I \models C$ 写为 $I \models S$,它的实际涵义是 $I \models \wedge S$.

Herbrand 定理是把 I 的论域取为 Herbrand 域时给出 $I \models S$ 不成立的等价条件的定理. 其本质在于对每个 Herbrand 解释 I 造出 $\mathscr{L}$ 在 I 中的赋值 v 来使 v 不满足 $\wedge S$. 这一方法可在若干方面加以改进.

5.1.4 归结原理

归结原理原文为 resolution principle, 如今许多中文书籍中都把它翻译为归结原理,但也有把它翻译为消解原理的,如文献[3] 等. 归结原理处理的对象也是不含量词的公式,所以它也需要先经过 Skolem 变形摆脱掉公式中的量词以后才可以施

行.其合理性可基于 Herbrand 定理进行证明.

命题演算中的归结原理是简单的,为证明式(5.1.1) 成立也可不用归结原理.但在谓词演算中由于式(5.1.1) 是否成立不可判定,归结方法是一个很有用的方法.

注 5.1.1 在本章中我们恒假设 $\mathscr{L}$ 中有足够多的个体常元和函数符号,即,对任意给定的一个或一组公式,$\mathscr{L}$ 中还有不在这些公式中出现的个体常元和函数符号.又,当谈到针对一个或一组公式的解释时,我们不关心未在这个或这组公式中出现的 $\mathscr{L}$ 中的个体常元,函数符号以及谓词符号的解释是什么,需要时我们再明确它们的解释.最后,由谓词系统 $\boldsymbol{K}$ 的完备性定理,可证等价与逻辑等价是一致的.所以在以后可视不同情况在二者中选择不同的用语.

5.2 Skolem 标准形

在第 4 章中已经证明,任一公式都可化为一个与之可证等价的前束范式

$$(Q_1x_1)\cdots(Q_nx_n)D,\quad n\geqslant 0,\quad D\in\mathscr{F}_0. \tag{5.2.1}$$

这里为方便起见我们设公式中的全体自由变元为 $x_1,\cdots,x_n$,Q_i 为 $\forall$ 或 $\exists(i=1,\cdots,n)$.但为了能与后面要讲的 Herbrand 定理以及归结原理挂上勾,式(5.2.1) 中如果有存在量词就必须用某种方法消去.换句话说,我们需要把式(5.2.1) 化成 Π_1-型的前束范式(如果它本来不是 Π_1-型的话).这里"化成"二字即下面要讲的Skolem变形,它并不保证可证等价性.

5.2.1 化 Σ-型前束范式为 Π-型前束范式

Σ-型前束范式指以存在量词开头的前束范式,即形如$(\exists x_1)(Q_2x_2)\cdots(Q_nx_n)D$ 的前束范式.我们的目的是化去$(\exists x_1)$.把$(Q_2x_2)\cdots(Q_nx_n)D$记为A,我们的目的就是化去$(\exists x_1)A$ 中的$(\exists x_1)$.这时可使用下述的 Skolem 方法.

Skolem 变形 1 设有公式$(\exists x_i)A(x_i)$,x_i 是 $A(x_i)$ 中的自由变元.任选一个不在 $A(x_i)$ 中出现的个体常元 c,则$(\exists x_i)A(x_i)$ 可化为 $A(c)$.

如前所述,这种方法不保证 $A(c)$ 与$(\exists x_i)A(x_i)$ 可证等价.

例 5.2.1 设 A 为 $A_1^1(x_1)$,则 A 不含个体常元.任取 $\mathscr{L}$ 中的个体常元 c,则$(\exists x_1)A_1^1(x_1)$ 与 $A_1^1(c)$ 不是可证等价的.如,考虑 $\mathscr{L}$的自然数解释 I,把 c 解释为 0,把 A_1^1 解释为$\overline{A_1^1}=N-\{0\}$.取 $\mathscr{L}$在 I 中的赋值 v,则 v 满足$(\exists x_1)A_1^1(x_1)$,但 v 不满足 $A_1^1(c)$,因为$\overline{A_1^1}(v(c))=\overline{A_1^1}(0)$ 不成立.可见 $A_1^1(c)$ 与$(\exists x_1)A_1^1(x_1)$ 不是逻辑等价的,从而也就不是可证等价的.但下述命题成立.

命题 5.2.1 设按 Skolem 变形把$(\exists x_i)A(x_i)$ 化成了 $A(c)$,则$(\exists x_i)A(x_i)$ 是矛盾式当且仅当 $A(c)$ 是矛盾式.

证明 设 I 是 $\mathscr{L}$的任一解释.如果$(\exists x_i)A(x_i)$ 是矛盾式,则对 $\mathscr{L}$在 I 中的任

一赋值 v，v 不满足 $(\exists x_i)A(x_i)$，即，v 满足 $(\forall x_i)\neg A(x_i)$，那么每个与 v i- 等价的赋值 v' 都不满足 $A(x_i)$，特别令 $v'(x_i)=v(c)$，由项的代入定理(命题 3.2.3) 知 v 不满足 $A(c)$. 由 v 的任意性知 $A(c)$ 为矛盾式.

反过来，设 $(\exists x_i)A(x_i)$ 不是矛盾式，则有 $\mathscr{L}$ 的解释 I 以及 $\mathscr{L}$ 在 I 中的赋值 v 使 v 满足 $(\exists x_i)A(x_i)$. 由于个体常元 c 不在 $A(x_i)$ 中出现，所以把 $v(c)$ 的值任意改变都不影响 v 满足 $(\exists x_i)A(x_i)$ 这一事实. 这时 v 不满足 $(\forall x_i)\neg A(x_i)$，即存在与 v i- 等价的赋值 v'，v' 满足 $A(x_i)$. 根据以上所述，可设 $v(c)=v'(x_i)$. 那么由项的代入定理知 v 满足 $A(c)$，从而 $A(c)$ 也不是矛盾式.

5.2.2　化 Π_m- 型前束范式为 Π_1- 型前束范式

在上面我们只是化去了前束范式中在开头位置出现的存在量词，如果再能按某种方法化去后面出现的存在量词，那就可得到形如式(5.1.4) 的前束范式，也即 Π_1- 型前束范式. 设前束范式为

$$(\forall x_1)\cdots(\forall x_k)(\exists x_{k+1})(Q_{k+2}x_{k+2})\cdots(Q_nx_n)D,$$

这里 $D\in\mathscr{F}_0$. 这是一个 Π- 型的前束范式，它至少是 Π_2- 型的. 把 $(\exists x_{k+1})$ 以后部分组成的公式叫做 A，那么上式可写为

$$(\forall x_1)\cdots(\forall x_k)(\exists x_{k+1})A.$$

如果我们能够化去 $(\exists x_{k+1})$，当然也可用同样方法继续化去后面可能出现的存在量词，那么与 Skolem 变形 1 一起最终可将任何一个前束范式都化成 Π_1- 型的.

Skolem 变形 2　设有公式

$$(\forall x_1)\cdots(\forall x_k)(\exists x_{k+1})A(x_1,\cdots,x_{k+1}).\tag{5.2.2}$$

$x_1,\cdots,x_{k+1}$ 都是公式 A 中的自由变元. 任选一不在 A 中出现的 k 元函数符号 f^k，则公式(5.2.2) 可化为

$$(\forall x_1)\cdots(\forall x_k)A(x_1,\cdots,x_k,f^k(x_1,\cdots,x_k)).\tag{5.2.3}$$

Skolem 变形 2 也不保证公式的可证等价性.

例 5.2.2　公式 $(\forall x_1)(\exists x_2)A_1^2(x_1,x_2)$ 与 $(\forall x_1)A_1^2(x_1,f_1^1(x_1))$ 不是可证等价的. 比如，考虑 $\mathscr{L}$ 的整数解释 Z，把 f_1^1 解释为 $\overline{f_1^1}$，这里 $\overline{f_1^1}(m)=m(m\in Z)$，把 A_1^2 解释为 $\overline{A_1^2}$，这里 $\overline{A_1^2}=Z^2-\{(m,m)\mid m\in Z\}$，取 $\mathscr{L}$ 在 Z 中的赋值 v 使 $v(x_1)\neq v(x_2)$，则 v 满足 $(\forall x_1)(\exists x_2)A_1^2(x_1,x_2)$，但 v 不满足 $(\forall x_1)A_1^2(x_1,f_1^1(x_1))$. 所以 $(\forall x_1)(\exists x_2)A_1^2(x_1,x_2)$ 与 $(\forall x_1)A_1^2(x_1,f_1^1(x_1))$ 不是逻辑等价的. 也就不是可证等价的. 但下述命题成立.

命题 5.2.2　设按 Skolem 变形把公式(5.2.2) 化成了公式(5.2.3)，则式(5.2.2) 为矛盾式当且仅当式(5.2.3) 为矛盾式.

证明　以 $k=2$ 为例进行证明. 设式(5.2.3) 不是矛盾式，则有 $v\in\Omega_I$(即，v 是 $\mathscr{L}$ 在某解释 I 中的一个赋值，下同)，v 满足式(5.2.3)，那么每个与 v 1- 等价的 v_1 满足 $(\forall x_2)A(x_1,x_2,f^2(x_1,x_2))$，每个与 v_1 2- 等价的 v_2 满足 $A(x_1,x_2,f^2(x_1,x_2))$.

取 $v_3 \in \Omega_I$ 使 $v_3(x_1) = v_2(x_1)$，$v_3(x_2) = v_2(x_2)$，$v_3(x_3) = v_2(f^2(x_1,x_2))$，则由 v_2 满足 $A(x_1,x_2,f^2(x_1,x_2))$ 及项的代入定理（项 t 为 $f^2(x_1,x_2)$）知 v_3 满足 $A(x_1,x_2,x_3)$ 或 v_3 不满足 $\neg A$，那么 v_2 不满足 $(\forall x_3)\neg A(x_1,x_2,x_3)$，即 v_2 满足 $(\exists x_3)A(x_1,x_2,x_3)$. 可见 v 满足式(5.2.2)，即式(5.2.2) 不是矛盾式.

反过来，设(5.2.2) 式不是矛盾式，则有 $v \in \Omega_I$，v 满足式(5.2.2)，那么每个与 v 1- 等价的 v_1 满足 $(\forall x_2)(\exists x_3)A(x_1,x_2,x_3)$，每个与 v_1 2- 等价的 v_2 满足 $(\exists x_3)A(x_1,x_2,x_3)$. 这时有与 v_2 3- 等价的赋值 v_3，v_3 满足 $A(x_1,x_2,x_3)$. 设 $v_2(x_1) = d_1$，$v_2(x_2) = d_2$，则 $v_3(x_1) = v_2(x_1)$，$v_3(x_2) = v_2(x_2)$，而 $v_3(x_3)$ 依赖于 d_1 与 d_2. 设 $v_3(x_3) = \overline{f}(d_1,d_2)$. 就让 $\overline{f}$ 为 f^2 的解释，则

$$v_3(x_3) = \overline{f}(d_1,d_2) = \overline{f}(v_2(x_1),v_2(x_2)) = v_2(f^2(x_1,x_2)).$$

所以由 v_3 满足 $A(x_1,x_2,x_3)$ 以及项的代入定理知 v_2 满足 $A(x_1,x_2,f^2(x_1,x_2))$，那么 v 满足式(5.2.3)，从而式(5.2.3) 不是矛盾式.

注 5.2.1　类似于以上证明的前半部分可以证明

$$(\forall x_1)\cdots(\forall x_k)A(x_1,\cdots,x_k,f^k(x_1,\cdots,x_k))$$
$$\to (\forall x_1)\cdots(\forall x_k)(\exists x_{k+1})A(x_1,\cdots,x_{k+1})$$

为逻辑有效公式. 但相反的蕴涵式一般不是逻辑有效的.

命题 5.2.3　$(\forall x_i)(A \wedge B) \approx (\forall x_i)A \wedge (\forall x_i)B$.

证明　设 I 是 $\mathscr{L}$ 的任一解释，v 是 $\mathscr{L}$ 在 I 中的任一赋值，且 v 满足 $(\forall x_i)(A \wedge B)$，则每个与 v i- 等价的赋值 v' 都满足 $A \wedge B$，即 v' 满足 $\neg(A \to \neg B)$. 这等价于说 v' 同时满足 A 与 B. 那么由 v' 的任意性知 v 满足 $(\forall x_i)A$ 且 v 满足 $(\forall x_i)B$，那么 v 满足 $(\forall x_i)A \wedge \forall(x_i)B$.

反过来，设 v 满足 $(\forall x_i)A \wedge (\forall x_i)B$，则易证 v 也满足 $(\forall x_i)(A \wedge B)$.

注 5.2.2　利用上述命题和完备性定理可将 Π_1- 型前束范式中量词后的合取项的变元在可证等价的意义下改为不同的变元. 如，

$$(\forall x_1)(\forall x_2)(A_1^2(x_1,x_2) \wedge A_2^2(x_1,x_2))$$
$$\sim (\forall x_1)(\forall x_2)A_1^2(x_1,x_2) \wedge (\forall x_1)(\forall x_2)A_2^2(x_1,x_2)$$
$$\sim (\forall x_1)(\forall x_2)A_1^2(x_1,x_2) \wedge (\forall x_3)(\forall x_4)A_2^2(x_3,x_4)$$
$$\sim (\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(\forall x_4)(A_1^2(x_1,x_2) \wedge A_2^2(x_3,x_4)).$$

这最后一步是因为对于一个闭公式 A 而言，任取变元 $y_1,\cdots,y_n$ 均有

$$(\forall y_1)\cdots(\forall y_n)A \sim A.$$

5.2.3 Skolem 标准形

定义 5.2.1　设 A 是任一闭公式，则 A 可证等价于一个前束范式，把此前束范式按 Skolem 变形 1 与 Skolem 变形 2 化去所有的存在量词，得到一个 Π_1- 型前束范式式(5.1.4)，再把式(5.1.4) 中的 C 化为合取范式. 最后根据命题 5.2.3 与变元代换定理以及注 5.2.2 知式(5.1.4) 可证等价于一个前束范式

$$(\forall x_1)\cdots(\forall x_n)D, \tag{5.2.4}$$

其中 D 为合取范式，且各合取项不含相同的变元. 称式(5.2.4)为 A 的 **Skolem 标准形**. 称 D 为 Skolem 标准形的**母式**. 由 Skolem 变形的算法知式(5.2.4)也是闭公式.

由命题 5.2.1 与命题 5.2.2 以及以上分析得

命题 5.2.4 设 $A \in \mathscr{F}$，则 A 为矛盾式当且仅当 A 的 Skolem 标准形为矛盾式.

为简便计，以下经常用大写字母 P,Q,R 等表示谓词符号，用 f,g,h 等表示函数符号，其元数可由项或变元的位置个数看出，同时变元经常用 x,y,z 等表示. 如在 $P(x,f(y,z))$ 中，P 为二元谓词符号，f 为二元函数符号，x,y,z 为变元.

例 5.2.3 (i) 设 A 为

$$(\exists x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(\exists x_4)(\forall x_5)P(f(x_1,x_2),g(x_3,x_4),h(x_4,x_5)),$$

这里 P 为三元谓词符号，求 A 的 Skolem 标准形.

解 取不在 A 中出现的个体常元 c 和二元函数符号 u，则 A 的 Skolem 标准形为

$$(\forall x_2)(\forall x_3)(\forall x_5)P(f(c,x_2),g(x_3,u(x_2,x_3)),h(u(x_2,x_3),x_5)).$$

(ii) 设 A 为第 4 章中的式(4.3.1)，即

$$(\forall x_1)(\forall x_2)A_1^2(x_1,x_2) \rightarrow \neg(\exists x_2)A_1^1(x_2)) \rightarrow (\forall x_1)(\forall x_2)A_2^2(x_1,x_2),$$

求 A 的 Skolem 标准形.

解 首先化 A 为前束范式，得

$$(\forall x_4)(\forall x_5)(\exists x_3)(\forall x_1)(\forall x_2)((A_1^2(x_1,x_2) \rightarrow \neg A_1^1(x_3)) \rightarrow A_2^2(x_4,x_5)).$$

其次消去 $(\exists x_3)$ 得

$$(\forall x_4)(\forall x_5)(\forall x_1)(\forall x_2)((A_1^2(x_1,x_2) \rightarrow \neg A_1^1(f(x_4,x_5))) \rightarrow A_2^2(x_4,x_5)).$$

再把 $((A_1^2(x_1,x_2) \rightarrow \neg A_1^1(f(x_4,x_5))) \rightarrow A_2^2(x_4,x_5))$ 化为合取范式. 因为 $A \rightarrow B \sim \neg A \vee B$，所以上式可化为

$$\neg(\neg A_1^2(x_1,x_2) \vee \neg A_1^1(f(x_4,x_5))) \vee A_2^2(x_4,x_5)$$
$$\sim (A_1^2(x_1,x_2) \wedge A_1^1(f(x_4,x_5))) \vee A_2^2(x_4,x_5)$$
$$\sim (A_1^2(x_1,x_2) \vee A_2^2(x_4,x_5)) \wedge (A_1^1(f(x_4,x_5)) \vee A_2^2(x_4,x_5))$$

最后再把两个合取项中的变元改为不同的变元得

$$(A_1^2(x_1,x_2) \vee A_2^2(x_4,x_5)) \wedge (A_1^1(f(x_6,x_7)) \vee A_2^2(x_6,x_7)).$$

所以 A 的 Skolem 标准形为

$$(\forall x_4)(\forall x_5)(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_6)(\forall x_7)$$
$$((A_1^2(x_1,x_2) \vee A_2^2(x_4,x_5)) \wedge (A_1^1(f(x_6,x_7)) \vee A_2^2(x_6,x_7))). \tag{5.2.5}$$

注 5.2.3 (i) 在第 4 章已经见到，同一个公式可以化成不同的、彼此可证等价的前束范式. 比如上例(ii) 中的 A 也可化为

$$(\exists x_3)(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_4)(\forall x_5)((A_1^2(x_1,x_2) \rightarrow \neg A_1^1(x_3)) \rightarrow A_2^2(x_4,x_5)).$$

在此基础上进行 Skolem 变形得

$$(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_4)(\forall x_5)((A_1^2(x_1,x_2)\to\neg A_1^1(c))\to A_2^2(x_4,x_5)).$$

最终可得 A 的另一 Skolem 标准形

$$\begin{aligned}&(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_4)(\forall x_5)(\forall x_6)(\forall x_7)\\&((A_1^2(x_1,x_2)\vee A_2^2(x_4,x_5))\wedge(A_1^1(c)\vee A_2^2(x_6,x_7))).\end{aligned}\tag{5.2.6}$$

可见 A 的 Skolem 标准形不是唯一的.但只要其中一个为矛盾式,其余的也必为矛盾式.在本例中 A 的两个 Skolem 标准形有不同的母式.

(ii) 由于有命题 5.2.3,Skolem 标准形关于各合取项中不含相同变元的要求一般都可以略去(除非有特定的要求).所以式(5.2.6)也可写为

$$(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_4)(\forall x_5)((A_1^2(x_1,x_2)\vee A_2^2(x_4,x_5))\wedge(A_1^1(c)\vee A_2^2(x_4,x_5))).$$

式(5.2.5)也可以作同样的简化.

习　　题　5.2

1. 把以下各式化为 Skolem 标准形:

(i) $(\exists x_1)(\forall x_2)(\exists x_3)A_1^3(x_1,x_2,x_3)$.

(ii) $(\forall x_1)(\forall x_2)(\exists x_3)(\forall x_4)P(f(x_1,x_2),x_3,g(x_4))$,这里 P 为三元谓词符号.

(iii) $(\forall x_2)(\exists x_1)(A_1^1(x_1)\to A_1^2(x_1,x_2))\to((\forall x_2)A_1^1(x_2)\to(\forall x_2)(\exists x_3)A_1^2(x_2,x_3))$.

2. 试证 $(\forall x_1)(\exists x_2)A_1^2(x_1,f_1^1(x_2))$ 和 $(\forall x_1)A_1^2(x_1,f_1^1(f_2^1(x_1)))$ 不是可证等价的.

3. 试证 $(\exists x_i)A(x_i)$ 逻辑有效当且仅当对 $\mathscr{L}$ 的任一解释 I 均有 $\bar{c}\in D(I)$ 使 $\bar{A}(\bar{c})$ 在 I 中成立,这里 $A\in\mathscr{F}_0$,即 A 中不含量词.

4. 试证 $(\forall x_i)A(x_i)$ 为矛盾式当且仅当对 $\mathscr{L}$ 的任一解释 I,$I\models A(x_i)$ 都不成立,这里 x_i 是 $A(x_i)$ 中唯一的自由变元.

5. 找出两个不含量词的公式 A 与 B,使以下二条件都成立:

(i) $A(x)\wedge B(x)$ 为矛盾式,但 $A(x)\wedge B(y)$ 不是矛盾式.

(ii) 对 $\mathscr{L}$ 的任一解释 I,$I\models A(x)\wedge B(y)$ 都不成立当且仅当对 $\mathscr{L}$ 的任一解释 I^*,$I^*\models A(x)\wedge B(x)$ 都不成立.

5.3　子　　句

定义 5.3.1　$\mathscr{L}$ 中的原子公式及其否定叫做**文字**(literal),有限多个文字的析取叫**子句**(clause),只含一个文字的子句叫**单子句**.

比如,$A_1^1(x_1)$,$\neg A_1^2(x_1,f_1^1(x_2))$ 等都是文字,$A_1^1(x_1)\vee\neg A_1^2(x_1,f_1^1(x_2))\vee A_1^3(x_1,x_2,x_3)$ 是子句.又,如果用 P,Q,R 表示谓词符号,则

$$P(x,f(y))\vee\neg Q(f(x))\vee R(x,y,g(x,y))$$

是子句,这里 f 与 g 分别是一元和二元函数符号.

定义 5.3.2　设 $A\in\mathscr{F}$,则 A 可化为 Skolem 标准形,其母式为一合取范式且各

合取项不含相同变元. 每个合取项都是一个子句. 称这些子句之集 S 为 A 的**子句集**.

比如,如果公式 A 如例 5.2.3(ii) 所述,则由式(5.2.5) 知

$$S = \{A_1^2(x_1,x_2) \vee A_2^2(x_4,x_5), A_1^1(f(x_6,x_7)) \vee A_2^2(x_6,x_7)\}$$

是 A 的子句集. 因为 A 的 Skolem 标准形可能不唯一,所以 A 可能还有别种形式的子句集. 如由式(5.2.6) 知

$$S' = \{A_1^2(x_1,x_2) \vee A_2^2(x_4,x_5), A_1^1(c) \vee A_2^2(x_6,x_7)\}$$

也是 A 的子句集.

以下讨论子句集 S 时也可以不指明 S 是哪一个公式的子句集,但各子句应不含相同变元. 以下用 $\wedge S$ 表示 S 中各子句的合取,从而如果 S 是 A 的子句集,那么 $\wedge S$ 就是 A 的 Skolem 标准形的母式. 以下当 $\wedge S$ 不可满足时称 S 不可满足.

注 5.3.1 (i) 如果我们的目的是证明 $\wedge S$ 为矛盾式,则 S 中各子句不含相同变元这一要求是不可去掉的. 如设 $S = \{A_1^1(x), \neg A_1^1(x)\}$,则 $\wedge S$ 显然是矛盾式,但若把 S 改为 $S' = \{A_1^1(x), \neg A_1^1(y)\}$,则 $\wedge S'$ 就不是矛盾式了.

(ii) 但在本章中我们目的不是要证明 $\wedge S$ 为矛盾式,而是要证明 Π_1- 型的 Skolem 标准形为矛盾式,这时 $\wedge S$ 作为其母式,并不一定是矛盾式. 在这种情况下,由命题 5.2.3 以及变元代换定理知也可以允许 S 中的不同子句含有相同的变元.

(iii) 把 S 中不同子句中的变元写成不同形式虽然要多用到一些变元,但在以后的推理中会更清楚一些.

命题 5.3.1 设 S 是闭公式 B 的子句集,则 B 为矛盾式当且仅当 S 不可满足.

先证明一个引理

引理 5.3.1 设 $A \in \mathscr{F}$,则 clA 为矛盾式当且仅当 A 不可满足.

证明 设 $x_1,\cdots,x_n$ 为 A 中全体自由出现的变元,则

$$clA = (\forall x_1)\cdots(\forall x_n)A. \tag{5.3.1}$$

以 $n = 2$ 为例进行证明.

设 clA 为矛盾式,则 clA 不可满足. 由命题 3.2.5(iii) 便知 A 不可满足.

反过来,设 clA 不是矛盾式. 则 $\mathscr{L}$ 有解释 I 和 $\mathscr{L}$ 在 I 中的赋值 v,v 满足 $(\forall x_1)(\forall x_2)A$. 设 u 是 $\mathscr{L}$ 在 I 中的任一赋值,作赋值 v' 如下:

$$v'(x_1) = u(x_1), \quad v'(x_2) = v(x_2), \tag{5.3.2}$$

则 v' 满足 $(\forall x_2)A$. 作赋值 v'' 如下:

$$v''(x_1) = u(x_1), \quad v''(x_2) = u(x_2),$$

则 v'' 满足 A. 因为 A 中的自由出现的变元只可能是 x_1 与 x_2 且 $v''(x_1) = u(x_1)$, $v''(x_2) = u(x_2)$,所以由命题 3.2.7 知 u 满足 A. 因为 u 是 $\mathscr{L}$ 在 I 中的任意赋值,所以 $I \models A$,即 A 可满足.

推论 5.3.1　设 $A \in \mathscr{F}$，则以下各条等价：

(i) clA 为矛盾式.

(ii) A 不可满足.

(iii) clA 不可满足.

证明　由引理 5.3.1 知以上前两条等价，由命题 3.2.5(iii) 知后两条等价，所以本推论成立.

命题 5.3.1 的证明　设 B 的 Skolem 标准形为

$$(\forall x_1)\cdots(\forall x_n)A \qquad (A = \wedge S). \tag{5.3.3}$$

因为 B 为闭公式，所以式(5.3.3) 为 A 的完全闭包 clA. 由命题 5.2.4 和推论 5.3.1 便知 B 为矛盾式当且仅当 A 不可满足. 因为 $A = \wedge S$，所以命题 5.3.1 成立.

5.4　正则函数系统与正则域*

正则域可用来作为 $\mathscr{L}$ 的一种解释的可数论域，针对不同的子句集可以作出不同的可数正则域. 这一工具对否定 $I \models S$ 提供了方便. 首先来看正则函数系统的概念.

定义 5.4.1　设 D 是非空集，$\bar{F}_0 \subset D$，$D - \bar{F}_0$ 为无穷集，$\bar{F}_k$ 是 D 上的至多可数的 k 元函数集($k = 1,2,\cdots$)，$F^* = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \bar{F}_k$，$\bar{F} = \bar{F}_0 \cup F^*$. 如果

(i) 对每个 $f \in F^*$，f 是单射且 $Img\ f \cap \bar{F}_0 = \varnothing$.

(ii) 设 f 和 g 是 F^* 中不同的函数，则 $Img\ f \cap Img\ g = \varnothing$.

(iii) 对每个 $f \in \bar{F}_k$，$f(x_1,\cdots,x_k) \neq x_i$，$i = 1,\cdots,k$，$k = 1,2,\cdots$.

这里对任一映射 $h: X \to Y$，$Img\ h = \{h(x) \mid x \in X\}$. 那么称 $\bar{F}$ 为 D 上的**正则函数系统**，且称序列 $(|\bar{F}_0|, |\bar{F}_1|, |\bar{F}_2|, \cdots)$ 为 $\bar{F}$ 的**型**，这里 $|\bar{F}_k|$ 可以是 0、正整数或可数无穷基数 ω，分别表示 $\bar{F}_k$ 是空集，非空有限集或可数无穷集. 又，当存在自然数 n 使当 $m > n$ 时 $\overline{F_m} = \varnothing$，则 $\bar{F}$ 的型也可写为有限序列 $(|\bar{F}_0|, |\bar{F}_1|, \cdots, |\bar{F}_n|)$.

例 5.4.1　设 $D = R_+ = \{x \mid x 是正实数\}$，$\bar{F}_0 = \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$，$\bar{F}_1 = \{f\}$，这里 $f: D \to D$ 定义为 $f(x) = x + 1$，则定义 5.4.1 中的条件都成立，所以 $\bar{F} = \bar{F}_0 \cup \bar{F}_1$ 是一个 $(1,1)$ 型的正则函数系统.

例 5.4.2　设 $D = \{1,2,\cdots\}$. p_m 是第 m 个素数，令 $\bar{F}_0 = \{10\}$，$\bar{F}_1 = \{f,g\}$，这里 $f,g: D \to D$ 分别由 $f(m) = p_m$ 和 $g(m) = p_m^2$ 确定，$\bar{F}_2 = \{h\}$，这里 $h: D^2 \to D$ 由 $h(m,n) = p_m p_n^2$ 确定，则

(i) f,g,h 显然都是单射，且

$$Img\ f \cap \bar{F}_0 = Img\ g \cap \bar{F}_0 = Img\ h \cap \bar{F}_0 = \varnothing.$$

(ii) $Img\ f \cap Img\ g = Img\ f \cap Img\ h = Img\ g \cap Img\ h = \varnothing$.

(iii) $f(m) \neq m, g(m) \neq m, h(m,n) \neq m, h(m,n) \neq n$.

所以$\{10,f,g,h\}$是一个$(1,2,1)$型的正则函数系统

命题 5.4.1（正则函数系统的存在性定理） 设 $T=(t_0,t_1,t_2,\cdots)$是任一给定的序列，这里 $t_i=0$，或 t_i 为正整数或$t_i=\omega(i=0,1,\cdots)$，则存在一个可数集 D 以及 D 上的型为 T 的正则函数系统 $\bar{F}$.

证明 取 D 为$\{1,2,\cdots\}$. 设 p_m 是第 m 个素数. 且当 $t_k\neq\omega$ 时令$[t_k]=\{\alpha\in D \mid \alpha\leqslant t_k\}$，当 $t_k=\omega$ 时令$[t_k]=D$. 定义 $\bar{F}_0,\bar{F}_1,\bar{F}_2,\cdots$ 如下：

(i) $\bar{F}_0=\{2^\alpha \mid \alpha\in D\cap[t_0]\}$，

(ii) $\bar{F}_1=\{\overline{f_\alpha^1} \mid \alpha\in D\cap[t_1]\}$，且 $f_\alpha^1:D\to D$ 由 $f_\alpha^1(m)=(p_{m+2})^\alpha$ 确定，$m\in D,\alpha\in D\cap[t_1]$.

(iii) $\bar{F}_2=\{\overline{f_\alpha^2} \mid \alpha\in D\cap[t_2]\}$，且 $f_\alpha^2:D^2\to D$ 由 $f_\alpha^2(m,n)=(p_{m+1}p_{m+n+1})^\alpha$ 确定，$m,n\in D,\alpha\in D\cap[t_2]$.

……

$(k+1)$ $\bar{F}_k=\{\overline{f_\alpha^k} \mid \alpha\in D\cap[t_k]\}$，且 $f_\alpha^k:D^k\to D$ 由 $f_\alpha^k(m_1,\cdots,m_k)=(p_{M_1}p_{M_2}\cdots p_{M_k})^\alpha$ 确定，$m_1,\cdots,m_k\in D, M_l=1+\sum\limits_{i=1}^{l}m_i, l=1,\cdots,k,k=1,2,\cdots$

……

令 $\bar{F}=\bigcup\{\bar{F}_k \mid k=0,1,2,\cdots\}$，则 $\bar{F}$ 是具有型 T 的 D 上的正则函数系统.

事实上，设 $F^*=\bar{F}-\bar{F}_0$，则

(i) 因为$\bar{F}_0$ 中的数全为偶数，而对每个$\bar{f}\in F^*$，$Img\ \bar{f}$ 是奇数之集，所以 $Img\ \bar{f}\cap\bar{F}_0=\varnothing$. 又，对任一$\overline{f_\alpha^k}\in\overline{F_k}$，$\overline{f_\alpha^k}$ 是单射. 只需考虑 $k\geqslant 2$ 的情形. 设$(m_1,\cdots,m_k)\neq(n_1,\cdots,n_k)$，则 $m_1=n_1,\cdots,m_k=n_k$ 不可能都成立，设 l 是使 $m_l\neq n_l$ 成立的最小数，如 $m_l<n_l$，则$\overline{f_\alpha^k}(m_1,\cdots,m_k)$ 有一因子 p_{M_l}，而它不是$\overline{f_\alpha^k}(n_1,\cdots,n_k)$ 的因子，所以 $\overline{f_\alpha^k}(m_1,\cdots,m_k)\neq\overline{f_\alpha^k}(n_1,\cdots,n_k)$，这就证明了 f_α^k 是单射.

(ii) 设 $\bar{f}\in\bar{F}_k,\bar{g}\in\bar{F}_l,k\neq l$，且 $k\neq 0,l\neq 0$. 则 $Img\ \bar{f}$ 与 $Img\ \bar{g}$ 中的元素分别含有 k 个与 l 个不同的素因子，所以 $Img\ \bar{f}\cap Img\ \bar{g}=\varnothing$. 设 $\bar{f},\bar{g}\in\bar{F}_k$ 且 $\bar{f}\neq\bar{g}$，如 $\bar{f}=\overline{f_\alpha^k},\bar{g}=\overline{f_\beta^k},\alpha<\beta$，则$Img\ \bar{g}$ 中元素含有比$Img\ \bar{f}$ 中元素更多的因子，所以仍有 $Img\ \bar{f}\cap Img\ \bar{g}=\varnothing$.

(iii) 因为$\overline{f_\alpha^k}(m_1,\cdots,m_k)$ 远远大于 $m_i(i=1,\cdots,k)$，所以

$$\overline{f_\alpha^k}(m_1,\cdots,m_k)\neq m_i \qquad (i=1,\cdots,k).$$

这就证明了 $\bar{F}$ 是可数集 D 上的正则函数系统，它的型显然为 T.

定义 5.4.2 设$\bar{F}=\bar{F}_0\cup\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\bar{F}_k$ 是非空集 D 上的正则函数系统，定义 $\mathscr{U}(\bar{F})$ 如下：

(i) 若 $\bar{F}_0\neq\varnothing$，则 $\bar{F}_0\subset\mathscr{U}(\bar{F})$，若 $\bar{F}_0=\varnothing$，在 D 中任取一元素 a，令 $a\in\mathscr{U}(\bar{F})$.

(ii) 设$\overline{f^k} \in \overline{F_k}$,且 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k \in \mathscr{U}(\overline{F})$,则$\overline{f^k}(\alpha_1, \cdots, \alpha_k) \in \mathscr{U}(\overline{F})$.

(iii) $\mathscr{U}(\overline{F})$ 中的全体元素由(i) 与(ii) 生成.

称 $\mathscr{U}(\overline{F})$ 为**关于 $\overline{F}$ 的正则域**.

例 5.4.3 设 $\overline{F}$ 是正则函数系统,$\overline{F}_0 = \{a\}$,$\overline{F}_1 = \{f\}$,$\overline{F}_2 = \{g\}$. 求关于 $\overline{F}$ 的正则域 $\mathscr{U}(\overline{F})$.

解 $\mathscr{U}(\overline{F}) = \{a, f(a), g(a,a), g(a, f(a)),$

$g(f(a),a), f(f(a)), f(g(a,a)), \cdots\}.$

作为正则函数系统的一个应用,我们给出下面的

命题 5.4.2(赋值定理) 设 $\mathscr{L}$ 是一阶语言,$F_k = \{f_i^k \mid i \in I_k\}$ 是 $\mathscr{L}$ 的 k 元函数符号之集,$\bigcup \{F_k \mid k \in K\}$ 是 $\mathscr{L}$ 的全体函数符号之集. 设 $q_1, q_2, \cdots$ 是一阶语言 $\mathscr{L}$ 中的原子公式序列,$\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ 是$\{0,1\}$ 中的序列,则 $\mathscr{L}$ 有解释 I 以及 $\mathscr{L}$ 在 I 中的赋值 v,满足条件

$$v(q_n) = \alpha_n, \quad n = 1,2,\cdots \tag{5.4.1}$$

证明 先设定解释 I 的论域 $D = \{1,2,\cdots\}$,然后逐步给出 $\mathscr{L}$ 的解释 I. 由正则函数系统的存在性定理,取 D 上的正则函数系统 $\overline{F} = \overline{F_0} \cup \overline{F_1} \cup \overline{F_2} \cup \cdots$ 使 $|\overline{F_0}| = |\{a_i \mid i \in I_0\}|$, $|\overline{F_k}| = |F_k|(k \in K)$,这里$\{a_i \mid i \in I_0\}$ 是 $\mathscr{L}$ 的个体常元集. 像命题 5.4.4 的证明中一样,对每个 $i \in I_0$,设 a_i 在 I 中的解释为 2^i. 对 $\mathscr{L}$ 的每个函数符号 f_i^k,设 f_i^k 在 I 中的解释为$\overline{f_i^k}$. 注意 $\overline{F}_0$ 中只含偶数,所以 $|D - \overline{F}_0| = \omega$. 定义 $\mathscr{L}$ 在 I 中的赋值 v 为 $v(x_i) = 3^i (i = 1,2,\cdots)$,则 $v: \{x_1, x_2, \cdots\} \to (D - \overline{F}_0)$ 为单射. 以下证明若 t_1^* 与 t_2^* 是 $\mathscr{L}$ 中二不同的项,则 $v(t_1^*) \neq v(t_2^*)$. 事实上,称个体常元和变元为 1 阶的项,若 $t_1, \cdots, t_k$ 都是不超过 $n-1$ 阶的项,且至少有一项为 $n-1$ 阶的项,则称 $f_i^k(t_1, \cdots t_k)$ 为 n 阶的项($n \geqslant 2$). 当$t_1{}^* \neq t_2^*$ 且 t_1^* 与 t_2^* 全是 1 阶的项时显然 $v(t_1^*) \neq v(t_2^*)$. 设当 $t_1^* \neq t_2^*$ 且 t_1^* 与 t_2^* 全是不超过 $n-1$ 阶的项时已证明 $v(t_1^*) \neq v(t_2^*)$. 今 t_1^* 与 t_2^* 中至少有一个 n 阶的项,另一个不超过 n 阶. 如果 t_1^* 与 t_2^* 中有一个是 1 阶项,比如 $t_2^* = a_i$ 或 $t_2^* = x_j$ 而 $t_1^* = f_i^k(t_1, \cdots, t_k)(k \geqslant 1)$,则 $v(t_2^*) = 2^i$ 或 $v(t_2^*) = 3^j$. 因为$\overline{f_i^1}(m) = (p_{m+2})^i (m \in D)$ 且当 $k \geqslant 2$ 时 $Img\ \overline{f_i^k}$ 中的元含有多于一个的素因子,所以 $v(t_1^*) \neq v(t_2^*)$. 如果 $t_1^* = f_i^k(t_1, \cdots, t_k)$, $t_2^* = f_j^l(t_1{}', \cdots, t_l{}')$ 且 $f_i^k \neq f_j^l$,则因 $Img\ \overline{f_i^k} \cap Img\ \overline{f_j^l} = \varnothing$,所以 $v(t_1^*) \neq v(t_2^*)$. 如果 $f_i^k = f_j^l$,则 $k = l$, $i = j$,且$(t_1, \cdots, t_k) \neq (t_1{}', \cdots, t_k{}')$. 所以有 $s \leqslant k$ 使 $t_s \neq t_s{}'$. 因为 t_s 与 $t_s{}'$ 的阶数均不超过 $n-1$,所以由归纳假设知 $v(t_s) \neq v(t_s{}')$. 那么$(v(t_1), \cdots, v(t_k)) \neq (v(t_1{}'), \cdots, v(t_k{}'))$. 所以由$\overline{f_i^k}$ 为单射知 $v(t_1^*) \neq v(t_2^*)$.

最后来看 $\mathscr{L}$ 中谓词符号的解释,设 A_j^l 为 $\mathscr{L}$ 中的任一谓词符号,设以 A_j^l 开头的原子公式为

$$q_{n(1)} = A_j^l(t_1^1, \cdots, t_l^1), \quad q_{n(2)} = A_j^l(t_1^2, \cdots, t_l^2), \cdots \tag{5.4.2}$$

因为 $q_{n(1)}, q_{n(2)}, \cdots$ 彼此不同，所以 $(t_1^1, \cdots, t_l^1), (t_1^2, \cdots, t_l^2), \cdots$，也彼此不同．那么由以上所证，

$(v(t_1^1), \cdots, v(t_l^1)), (v(t_1^2), \cdots, v(t_l^2)), \cdots$ 彼此不同．定义 A_j^l 的解释 $\overline{A_j^l}$ 如下：

$$\overline{A_j^l} = \{(v(t_1^i), \cdots, v(t_l^i)) \mid \alpha_{n(i)} = 1, i = 1, 2, \cdots\}. \tag{5.4.3}$$

那么由式(5.4.1) 与式(5.4.2) 得

$$v(q_{n(i)}) = \overline{A_j^l}(v(t_1^i), \cdots, v(t_l^i)) = \begin{cases} 1, & \text{当 } \alpha_{n(i)} = 1, \\ 0, & \text{当 } \alpha_{n(i)} = 0. \end{cases} \tag{5.4.4}$$

对 $\mathscr{L}$ 中的每个谓词符号 A_j^l 都作如上解释，则由式(5.4.4) 知式(5.4.1) 成立．

习　题　5.4

1. 设 $S = \{A(x), B(x)\}, S^* = \{A(x), B(y)\}$，这里 $A(x), B(x)$ 为简单析取式．试证：对 $\mathscr{L}$ 的任一解释 I，$I \models S$ 均不成立当且仅当对 $\mathscr{L}$ 的任一解释 I^*，$I^* \models S^*$ 均不成立(**提示**　利用命题 5.3.1)．

2. 称原子公式和它的否定为相反的文字对，利用赋值定理证明，如果子句集 S 不包含相反的文字对，则有 $v \in \Omega$ 使 $v(\wedge S) = 1$．也有 $u \in \Omega$ 使 $u(\wedge S) = 0$．

3. 试证文字不可能是逻辑有效公式，也不可能是矛盾式．

4. 举出一个 $(2,2,2)$ 型的正则函数系统．

5. 举出一个 $(\omega,1,1,\cdots)$ 型的正则函数系统．

6. 在命题 5.4.1 的证明中，素数的序号为什么要加 1(或加 2)？

7. 利用命题 5.4.1 的证明，证明存在 $\mathscr{L}$ 的可数解释 I，使

$$I \models A_1^4(x, f_1^1(x), f_1^2(x,y), y) \wedge \neg A_1^4(u, v, w, f_1^3(u,v,w))$$

成立(**提示**　证明 $(x, f_1^1(x), f_1^2(x,y), y) = (u, v, w, f_1^3(u,v,w))$ 不可能成立，从而可以把 A_1^4 的解释 $\overline{A_1^4}$ 作成使两个合取项都真)．

5.5　Herbrand 域与 Herbrand 定理

Herbrand 域是一种特殊的正则域，从它可以自然地生成一种正则函数系统．

5.5.1　Herbrand 域

定义 5.5.1　设 $\mathscr{L}$ 是一阶语言，F_0 是 $\mathscr{L}$ 中的若干个体常元之集，F 是 $\mathscr{L}$ 中的若干函数符号之集，定义 H 如下：

(i) $F_0 \subset H$．若 $F_0 = \varnothing$，则任取 $\mathscr{L}$ 的一个个体常元 a(当 $\mathscr{L}$ 不含个体常元时，给 $\mathscr{L}$ 添加一个个体常元 a)，设 $a \in H$．

(ii) 若 $f \in F$ 且 f 是 k 元函数符号，如果 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k \in H$，则 $f(\alpha_1, \cdots, \alpha_k) \in H$．

(iii) H 中再无其他元素．

称 H 为**关于 (F_0, F) 的 Herbrand 域**(Herbrand universe)．特别是当 F_0 和 F 分别是某子句集 S 中的个体常元集和函数符号集时，也称 H 为 **S 的 Herbrand 域**．

为了应用方便，H 还可分解为一列按包含序上升的子集之并，即，

$$H_0 = F_0, \text{若 } F_0 = \varnothing, \text{则 } H_0 = \{a\},$$
$$H_1 = H_0 \cup \bigcup \{f[H_0] \mid f \in F\},$$
$$H_2 = H_1 \cup \bigcup \{f[H_1] \mid f \in F\},$$
$$\vdots$$

这里若 f 是 k 元函数符号，则 $f[X]$ 表示 $\{f(x_1,\cdots,x_k) \mid x_1,\cdots,x_k \in X\}$.

容易验证

$$H = H_0 \cup H_1 \cup H_2 \cup \cdots \tag{5.5.1}$$

称 H_k 中的元为 H 的**第 k 级元**.

定义 5.5.2　设 H 是关于 (F_0,F) 的 Herbrand 域，这里 $F = F_1 \cup F_2 \cup \cdots, F_k$ 是 $\mathscr{L}$ 中的若干 k 元函数符号之集. 设 $f \in F_k$，作映射 $\overline{f}: H^k \to H$ 如下：

$$\overline{f}(h_1,\cdots,h_k) = f(h_1,\cdots,h_k), h_1,\cdots,h_k \in H. \tag{5.5.2}$$

令 $\overline{F} = \{\overline{f} \mid f \in F\}$，称 $F_0 \cup \overline{F}$ 为与 H 相应的 **Herbrand 系统**. 当 H 是子句集 S 的 Herbrand 域时，称相应的系统为 **S 的 Herbrand 系统**.

命题 5.5.1　Herbrand 系统是正则函数系统.

证明　(i) 任取 $\overline{f} \in F$，$Img\,\overline{f}$ 中的元以 f 开头，自然不同于 F_0 中的任何元，所以 $Img\,\overline{f} \cap F_0 = \varnothing$. 又，由式(5.5.2)知当 $(h_1{}',\cdots,h_k{}') \neq (h_1,\cdots,h_k)$ 时，$\overline{f}(h_1{}',\cdots,h_k{}') \neq \overline{f}(h_1,\cdots,h_k)$. 所以 $\overline{f}$ 是单射.

(ii) 设 $\overline{f}, \overline{g}$ 是 $\overline{F}$ 中不同的函数，则 $Img\,\overline{f}$ 与 $Img\,\overline{g}$ 中的元分别以 f 与 g 开头，从而是 H 中不同的元，所以 $Img\,\overline{f} \cap Img\,\overline{g} = \varnothing$.

(iii) 设 $\overline{f} \in \overline{F}$，由式(5.5.2)知 $\overline{f}(h_1,\cdots,h_k)$ 是在 H 中比 $h_1,\cdots,h_k$ 的级别都高的元. 所以

$$\overline{f}(h_1,\cdots,h_k) \neq h_i,\quad i = 1,\cdots,k.$$

这就证明了 Herbrand 系统是正则函数系统.

例 5.5.1　(i) 设 $F_0 = \varnothing, F = F_1 = \{f,g\}$. 则关于 (F_0,F) 的 Herbrand 域为

$$H = \{a, f(a), g(a), f(f(a)), f(g(a)), g(f(a)), \cdots\},$$

这里 a 是 $\mathscr{L}$ 中的任一个体常元.

(ii) 设 $S = \{A(f(x),b) \vee B(a,f(x)), \neg C(g(y,z))\}$，求 S 的 Herbrand 域 H. S 中出现的个体常元之集为 $F_0 = \{a,b\}$，S 中出现的函数符号之集 $F = \{f,g\}$. 所以 S 的 Herbrand 域是

$$H = \{a, b, f(a), f(b), g(a,a), g(a,b), g(b,a), g(b,b), f(f(a)), f(f(b)), f(g(a,a)), \cdots\}$$

注 5.5.1　(i) Herbrand 域 H 中的元都是 $\mathscr{L}$ 中的不含变元的项. 由一个 Herbrand 域自然就得出一个 Herbrand 系统，这种自然性表现在把函数符号当函数看待，且由式(5.5.2)看出，一个函数作用于 H 中的一组变元上时它的值就是那

个函数作用于自身.更为巧妙的是,一个函数自然可以通过列出它在各变元处的值而完全确定,而 Herbrand 域的结构正体现了这一点,所以当一个 Herbrand 域 H 给定之后,H 不只是一个集合,同时也给出了 H 上的一族函数.这时可以干脆把定义 5.5.2 中的函数 $\bar{f}$ 就写成 f,这时 H 既是 Herbrand 域,又是关于自身的 Herbrand 系统.用定义 5.4.2 的观点来看,即

$$\mathscr{U}(H) = H. \tag{5.5.3}$$

(ii) Herbrand 域 H 中涉及了一些个体常元和函数符号.如果只限考虑这些个体常元和函数符号组成的一阶语言 $\mathscr{L}$ 中的一部分,那么 Herbrand 域 H 不只为这部分语言提供了解释域,同时也对各函数符号进行了解释(其中把 $\mathscr{L}$ 的个体常元解释为其自身,即,H 中与 $\mathscr{L}$ 的个体常元 a 相对应的特定元 $\bar{a} = a$).所以可以称 Herbrand 域为相应语言的**半解释**(文献[20]中称其为 pre-interpretation,即预解释).待 $\mathscr{L}$ 中的谓词符号得到各种不同的解释之后,就会在此半解释的基础上得到 $\mathscr{L}$ 的各种不同的完整的解释.称每个这种解释为 **H- 解释**.本章中 $\mathscr{L}$ 的个体常元、函数符号与谓词符号均来自某子句 S,不再反复申明.所以 H- 解释实际上是对 S 中谓词符号的解释.称这时的 H- 解释为 **S 的 H- 解释**.S 的 H- 解释自然不止一个,因为 S 中的谓词符号可以有各种不同的解释.S 的 H- 解释在外形上有一个特点,即,如果 P 是 S 中出现的一个 n 元谓词符号,那么 P 的解释应是 H^n 的一个子集 $\bar{P}$,为简单起见,以下仍用 P 来记这个 $\bar{P}$.又,如果不指明某解释 I 是 S 的 H- 解释,则 I 就是 S 的普通解释.

(iii) 设 I 与 I^* 是 $\mathscr{L}$ 的两个解释,分别以 D 和 D^* 为论域,$v^*: \mathscr{T} \to D^*$ 是 $\mathscr{L}$ 在 I^* 中的一个赋值,$\xi: D^* \to D$ 是一个映射,则 $v = \xi \circ v^*: \mathscr{T} \to D$ 未必是 $\mathscr{L}$ 在 I 中的赋值,一般也无法对 ξ 加以要求而使 v 成为一个赋值,因为 D^* 与 D 上都没有结构.但当 D^* 为 Herbrand 域 H 时,我们有下面的引理.

引理 5.5.1 设 I 是 $\mathscr{L}$ 的解释,D 是其论域,且有限子句集 S 不含个体常元或只含有限多个个体常元 $a_1, \cdots, a_m$. H 是 S 的 Herbrand 半解释.这时相应地,$H_0 = \{a\}$ 或 $H_0 = \{a_1, \cdots, a_m\}$($a$ 是 $\mathscr{L}$ 中的任一个体常元).则存在映射 $\xi: H \to D$,使对 $\mathscr{L}$ 在 H 中的任一赋值 $v^*: \mathscr{T} \to H$,$v = \xi \circ v^*: \mathscr{T} \to D$ 是 $\mathscr{L}$ 在 I 中的一个赋值.

证明 设 S 中的个体常元 a_i 在 D 中的特定元为 $\bar{a}_i$,则定义映射 $\xi_0: H_0 \to D$ 为 $\xi_0(a_i) = \bar{a}_i (i = 1, \cdots, m)$.如果 S 不含个体常元(这时 H_0 为单点集 $\{a\}$),则令 $\xi_0: H_0 \to D$ 为任一映射.递归地定义 $\xi: H \to D$ 如下:设对 $h_1, \cdots, h_n \in H_k$,$\xi(h_i)$ 已定义 $(i = 1, \cdots, n)$,f 是任一 n 元函数符号,则 $f(h_1, \cdots, h_n) \in H_{k+1}$,令

$$\xi(f(h_1, \cdots, h_n)) = \bar{f}(\xi(h_1), \cdots, \xi(h_n)), \tag{5.5.4}$$

这里 $\bar{f}$ 是 f 在 I 中的解释.设 $v^*: \mathscr{T} \to H$ 是 $\mathscr{L}$ 在 H 中的任一赋值,由半解释 H 的结构知

$$v^*(f(h_1, \cdots, h_n)) = f(v^*(h_1), \cdots, v^*(h_n)). \tag{5.5.5}$$

设 $v=\xi\circ v^*$. 由式(5.5.4)与式(5.5.5)得

$$\begin{aligned} v(f(t_1,\cdots,t_n)) &= \xi(v^*(f(t_1,\cdots,t_n))) \\ &= \xi(f(v^*(t_1),\cdots,v^*(t_n))) \\ &= \overline{f}(\xi(v^*(t_1)),\cdots,\xi(v^*(t_n))) \\ &= \overline{f}(v(t_1),\cdots,v(t_n)). \end{aligned}$$

又,由 $v^*(a_i)=a_i$ 知 $v(a_i)=\xi\circ v^*(a_i)=\xi(a_i)=\overline{a}_i$,即,$v$ 把 a_i 映射为 I 中已定的特定元 $\overline{a}_i(i=1,\cdots,m)$. 所以 v 是 $\mathscr{L}$ 在 I 中的赋值.

命题 5.5.2　设 S 是有限的子句集,如果 $\mathscr{L}$ 有解释 I 使 $I\models S$ 成立,则 $\mathscr{L}$ 有基于半解释 H 的解释 I^* 使 $I^*\models S$ 成立.

证明　对 S 中出现的每个谓词符号 A,设 A 是 n 元的,A 在 I 中的解释为 $\overline{A}$,则在 I^* 中规定 A 的解释 A^* 如下:

$$A^*(h_1,\cdots,h_n)=1 \quad 当且仅当 \quad \overline{A}(\xi(h_1),\cdots,\xi(h_n))=1, \tag{5.5.6}$$

这里 ξ 如引理 5.5.1 中所述. 设 $p_1\vee\cdots\vee p_k$ 是 S 中的任一子句,则 $I\models p_1\vee\cdots\vee p_k$,这里 p_i 是文字 $(i=1,\cdots,k)$. 不妨设 $k=2$,且

$$p_1\vee p_2=A(t_1,\cdots,t_n)\vee\neg B(s_1,\cdots,s_m).$$

这里 A 与 B 分别为 n 元和 m 元谓词,$t_1,\cdots,t_n,s_1,\cdots,s_m$ 是项. 设 v^* 是 $\mathscr{L}$ 在 I^* 中的任一赋值,则

$$v^*(p_1\vee p_2)=A^*(v^*(t_1),\cdots,v^*(t_n))\vee\neg B^*(v^*(s_1),\cdots,v^*(s_m)). \tag{5.5.7}$$

令 $v=\xi\circ v^*$,则 v 是 $\mathscr{L}$ 在 I 中的赋值,所以由 $I\models p_1\vee p_2$ 得

$$\begin{aligned} v(p_1\vee p_2) &= v(p_1)\vee v(p_2) \\ &= \overline{A}(v(t_1),\cdots,v(t_n))\vee\neg\overline{B}(v(s_1),\cdots v(s_m)) \\ &= \overline{A}(\xi\circ v^*(t_1),\cdots,\xi\circ v^*(t_n)) \\ &\quad \vee\neg\overline{B}(\xi\circ v^*(s_1),\cdots,\xi\circ v^*(s_m))=1. \end{aligned}$$

所以由式(5.5.6)和式(5.5.7)即得 $v^*(p_1\vee p_2)=1$.

对一般情形类似可证

$$v^*(p_1\vee\cdots\vee p_k)=v(p_1\vee\cdots\vee p_k)=1,$$

这里 $v=\xi\circ v^*$. 由 v^* 的任意性得

$$I^*\models p_1\vee\cdots\vee p_k. \tag{5.5.8}$$

因为 $I^*\models A\wedge B$ 当且仅当 $I^*\models A$ 且 $I^*\models B$. 所以由 $p_1\vee\cdots\vee p_k$ 是 S 中的任一子句和式(5.5.8)得 $I^*\models S$.

推论 5.5.1　设 S 是有限的子句集,如果对 S 的每个 H-解释 I^*,$I^*\models S$ 都不成立,则对 S 的每个解释 I,$I\models S$ 都不成立.

5.5.2　二叉语义树

子句集 S 的 Herbrand 系统 H 只给出了 S 的半解释,利用二叉语义树可以给出

S 的完整 H- 解释.

定义 5.5.3 设 S 是有限子句集,H 是 S 的 Herbrand 域.

(i) 设 P 是 S 中的一个原子公式,把此公式中的变元用 H 中的元素去代换,所得不含变元的原子公式称为 S 的一个**基原子**(ground atom). S 的基原子的全体之集叫 S 的 Herbrand **基**(Herbrand base).

(ii) 设 C 是 S 中的一个子句,把 C 中变元用 H 中的元素去代换,所得不含变元的子句 C' 叫 C 的一个**基例**(ground instance),如果把 S 中谓词符号的解释仍用该符号表示,则任取赋值 u,$u(C)$ 就是 C 的基例. C' 也叫 S 的基例.

(iii) 设 A 是 S 的一个基原子,则称 A 与 $\neg A$ 为**互补对**.

例 5.5.2 设 $S = \{\neg P(x), Q(f(y)) \vee R(y)\}$,则 S 的 Herbrand 域

$$H = \{a, f(a), f(f(a)), \cdots\}.$$

(i) $Q(f(y)) \vee R(y)$ 是 S 的一个子句,$Q(f(a)) \vee R(a)$,$Q(f(f(a))) \vee R(f(a))$,$Q(f(f(f(a)))) \vee R(f(f(a)))$,… 等都是这个子句的基例.

(ii) S 有 3 个原子公式 $P(x)$,$Q(f(y))$ 和 $R(y)$,下面都是 S 的基原子,其全体构成 S 的 Herbrand 基:

$$\begin{aligned} &P(a), P(f(a)), P(f(f(a))), \cdots, \\ &Q(f(a)), Q(f(f(a))), Q(f(f(f(a)))), \cdots, \\ &R(a), R(f(a)), R(f(f(a))), \cdots \end{aligned} \tag{5.5.9}$$

注 5.5.2 (i) 若对 S 的每个基原子都指定了其为真或为假,就得到 S 的一个 H 解释(参看注 5.5.1(ii)). 比如,在 S 的 Herbrand 基式(5.5.9)中指定任一子集中的基原子为真,其余为假,就得到 S 的一个 H- 解释. 由于式(5.5.9)中含有可数多个基原子,所以 S 的 H- 解释有 2^{ω} 个. 为简便起见,我们约定:S 中谓词符号的解释仍用该符号自身去表示,且在 S 的一个基原子前不加任何符号就表示指定该原子公式为真,在前面加否定词 $\neg$ 后就表示该原子公式为假. 以式(5.5.9)为例,可让全部基原子为真,也可让全部基原子为假,又,下面是又一个 S 的 H- 解释:

$$\begin{aligned} &\neg P(a), \neg P(f(a)), \neg P(f(f(a))), \cdots, \\ &Q(f(a)), Q(f(f(a))), Q(f(f(f(a)))), \cdots, \\ &\neg R(a), \neg R(f(a)), \neg R(f(f(a))), \cdots \end{aligned} \tag{5.5.10}$$

对于 S 的一个完整解释而言,S 中一个 n 元谓词符号 A 应当解释为 H^n 的一个子集,仍用 A 表示. 这时应当对每一组 $(h_1, \cdots, h_n) \in H^n$ 说明 $(h_1, \cdots, h_n) \in A$ 是否成立. 不过为简便起见,我们不关心也不必写出与 S 无关的那些 n 元组 $(h_1, \cdots, h_n)$. 比如,在式(5.5.9)以及上面的第二行中,没有出现 $Q(a)$ 或 $\neg Q(a)$,这是因为 S 中以 Q 开头的原子公式只有 $Q(f(y))$,所以无论指定 $a \in Q$ 或 $a \notin Q$ 对 S 无任何影响,正是在这一意义下,我们说式(5.5.10)是 S 的一个解释. 实际上是我们略去了无关紧要的一部分解释. 以后在说到 S 的解释时就指上述意义下的解释.

(ii) 如果 S 不含函数符号或不含变元，则 S 的 Herbrand 基是有限集，可写为

$$\delta_1,\cdots,\delta_n.$$

如果 S 中含有函数符号及变元，则 H 为可数集，这时 S 的 Herbrand 基也是可数集，可写为

$$\delta_1,\delta_2,\cdots \tag{5.5.11}$$

(iii) 因为 S 中只含有限多个互不相同的原子公式，而当 S 含有函数符号及变元时式(5.5.11)是无穷序列，所以设 P 是 S 的一个含变元的原子公式，则式(5.5.11)中有子序列

$$\delta_{n_1},\delta_{n_2},\cdots$$

使得每个 δ_{n_i} 都是由对 P 中的变元进行适当的赋值而得. 如式(5.5.9)中的基原子 $P(a),P(f(a)),P(f(f(a))),\cdots$ 就是由对 S 中的原子公式 $P(x)$ 中的 x 分别赋值 $a,f(a),f(f(a)),\cdots$ 而得. 可见 S 的 Herbrand 基是由对 S 中的各原子公式中的变元进行各种可能的赋值后而得出的.

(iv) 参考文献[12],[13],[14]中关于基原子的定义与本书不同，设 $P(t_1,\cdots,t_n)$ 是 S 中出现的任一 n 元谓词公式，上述参考文献中称 $P(h_1,\cdots,h_n)$ 为 S 的基原子，这里 $h_1,\cdots,h_n\in H$. 如，由 $P(f(x))$ 可得基原子 $P(a)$. 但我们以为这种基原子可以略去，而 $P(f(a)),P(f(f(a))),\cdots$ 才是真正用得着的基原子. 因为无论在 H 中怎样赋值，由 $P(f(x))$ 也得不出 $P(a)$ 来. 实际上基原子是用来生成 S 的解释用的. 这一点在(i)中已有说明.

定义 5.5.4　设子句集 S 的 Herbrand 基由式(5.5.11)中的基原子组成，则称图 5.5.1 为 S 的**完全二叉语义树**. 称图 5.1 中每一条由根出发自上而下依次连接的边构成的路为这个语义树的一个**分支**. 当 S 的 Herbrand 基只含有 n 个基原子时，S 的完全二叉语义树是有限的，可由略去图 5.5.1 中 δ_n 与 $\neg\delta_n$ 以下的部分得出.

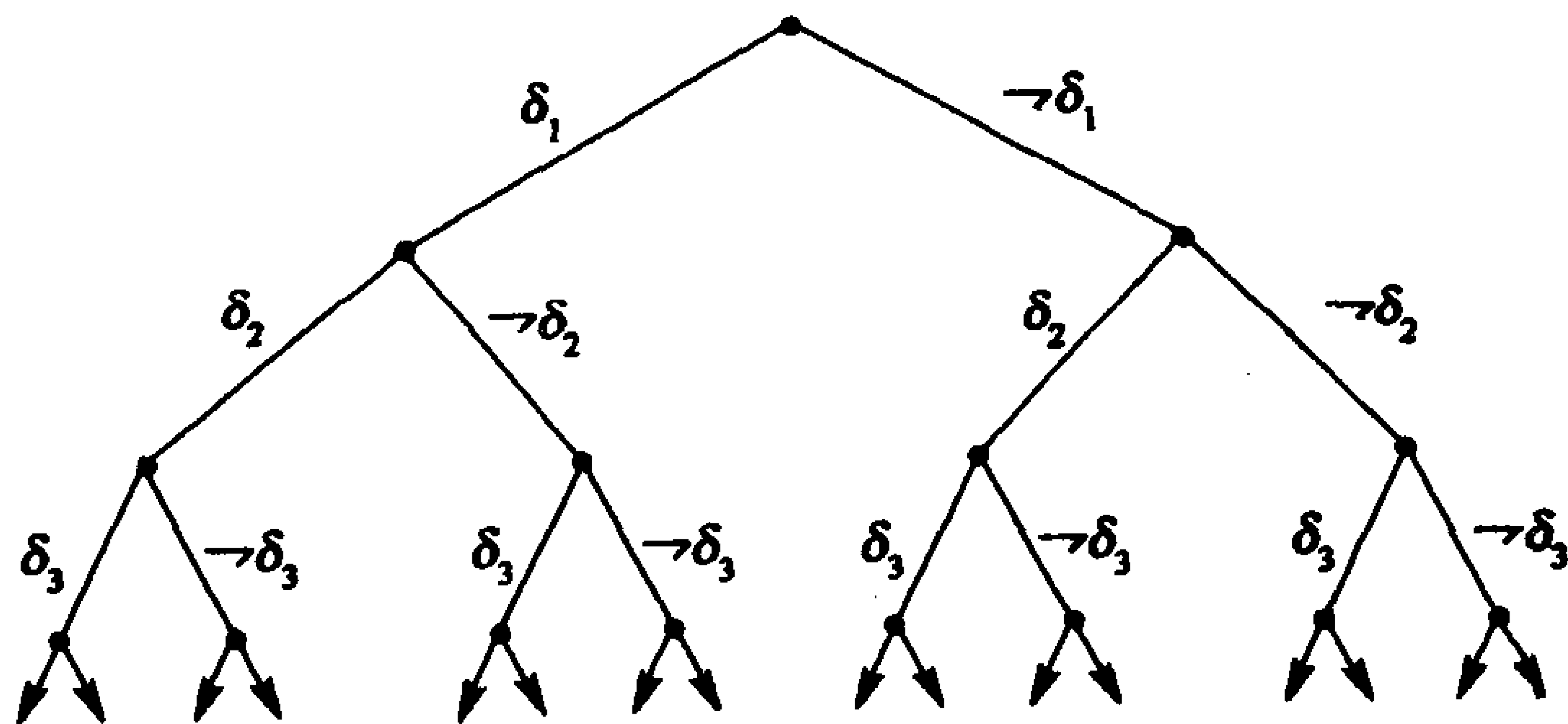


图 5.5.1

例 5.5.3 设 $S=\{P(a),\neg P(f(a)),\neg P(a)\vee Q(b)\}$，则 S 的完全二叉语义树如图 5.5.2 所示.

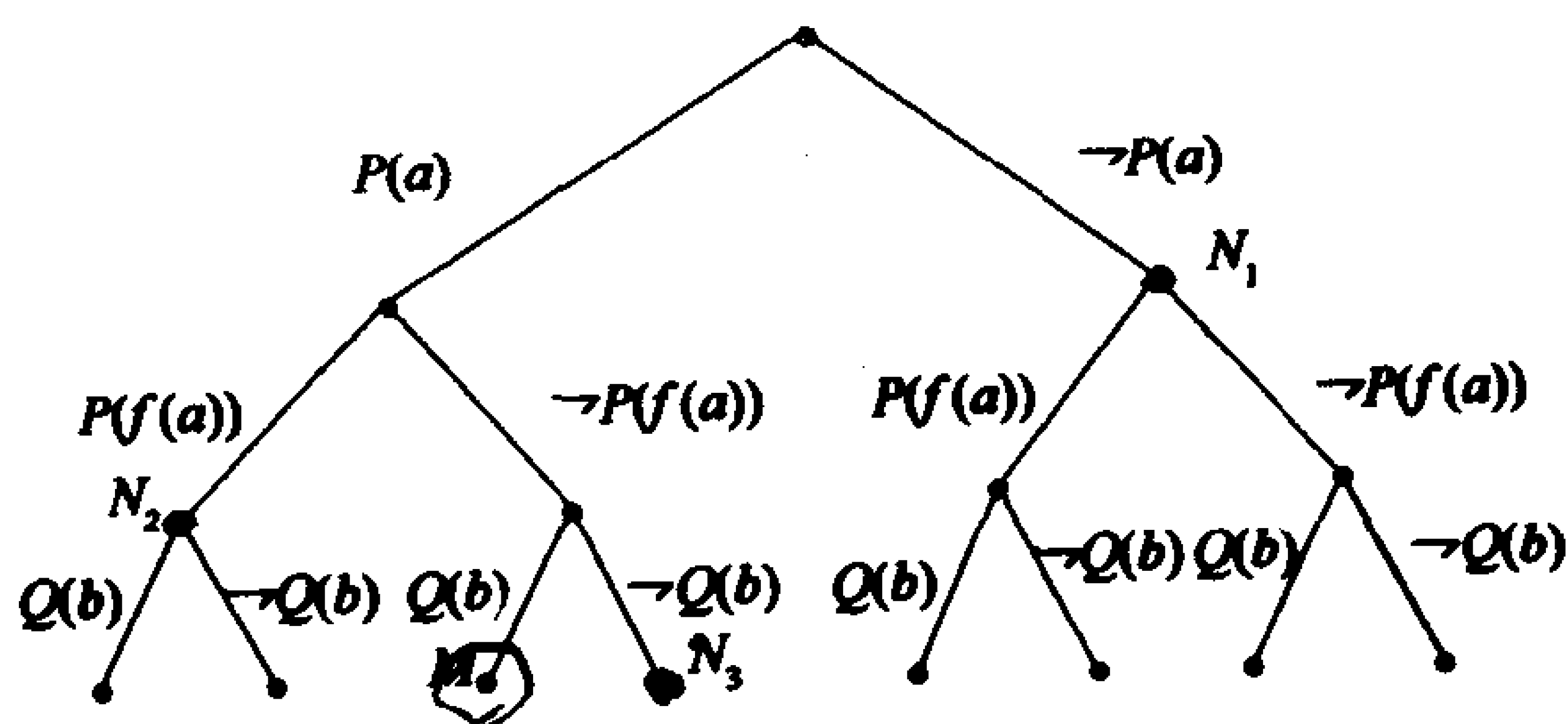


图 5.5.2

例 5.5.4 设 $S=\{P(x),\neg P(x)\vee Q(f(x)),\neg Q(f(a))\}$，求 S 的完全二叉语义树.

解 因为 S 中既有函数符号又有变元，所以 S 的 Herbrand 基和完全二叉语义树都是无限的. S 的 Herbrand 基为

$$\{P(a),Q(f(a)),P(f(a)),Q(f(f(a))),\cdots\}, \tag{5.5.12}$$

所以 S 的完全二叉语义树如图 5.5.3 所示.

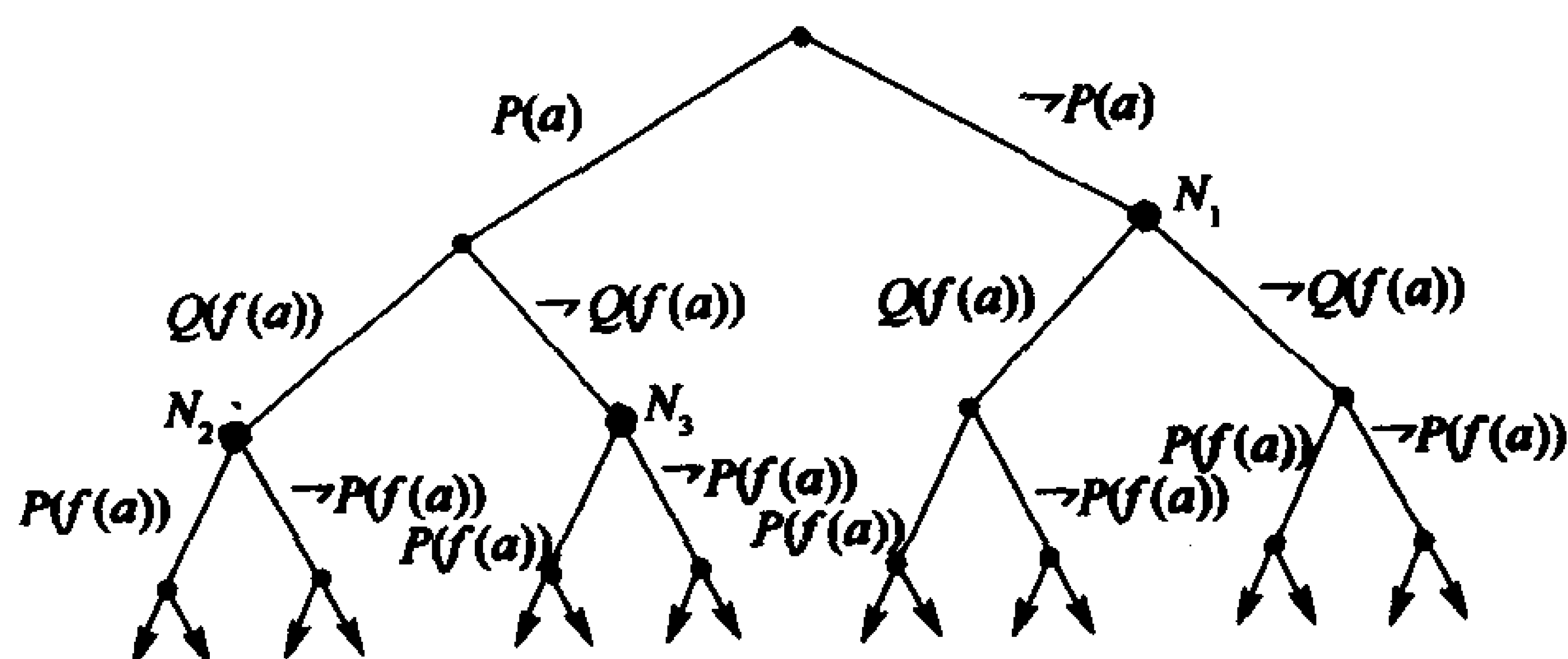


图 5.5.3

引理 5.5.2 如果二叉树 T 的每一条分支的长度都是有限的，则 T 中有一条最长的分支.

证明 分别称由 T 的根出发的左右两边为 0-边和 1-边. 分别称从 0-边末端出发的左、右两边为 00-边和 01-边，分别称从 1-边末端出发的左、右两边为 10-边和 11-边，…，依此类推，因为 T 中每条分支的长度都是有限的，所以每条分支都有一条最下方的边，其名称为 $\alpha_1\cdots\alpha_m$，这里 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m\in\{0,1\}(m=1,2,\cdots)$. 比如，0101-边就是从根出发沿左—右—左—右路径达到的边. 如果 T 中没有最长的分支，那么以 0 开头的分支或以 1 开头的分支中没有最长的分支，不妨设以 0 开头的分支中没有最长者，那么以 01 或 00 开头的分支中必有一没有最长者，不妨设为 01 开头者，这又推出以 010 开头或 011 开头的分

支中没有最长者，依此类推就得出 T 的一条长度无限的分支，矛盾！所以 T 中必有最长的分支.

由完全二叉语义树的结构以及注 5.5.2 知关于二叉语义树有如下的基本事实.

基本事实 5.5.1　设图 5.5.1 是有限子句集 S 的完全二叉语义树 T，则：

(i) 树 T 的每一个分支都是 S 的一个 H- 解释，S 的每个 H- 解释 I^* 都是树 T 的一个分支.

(ii) 设 I^* 是子句集 S 的 H- 解释. 则 $I^* \models S$ 不成立，当且仅当 S 中有子句 C 使 $I^* \models C$ 不成立，当且仅当 C 有一个基例 C' 在解释 I^* 之下不真. 因为 C' 只含有限多个文字，所以对于 S 的完全二叉语义树 T 而言，其中与解释 I^* 相应的那条分支 B^* 中存在自根向下的有限长部分 σ，其中各边上的 δ_i 或 $\neg\delta_i$ 的全体已经使 C' 不真了. 这时我们说 σ 使 C 不成立.

(iii) 设 $I^* \models S$ 不成立，则树 T 中与 I^* 相应的分支中存在自根向下的有限长部分 σ 使 S 中的某子句不成立. 取该分支中具有以上性质的最短的自根向下的有限长部分，称其最下面的结点为**失败结点**.

(iv) 如果对 S 的每个 H- 解释 I^*，$I^* \models S$ 都不成立，那么 S 的二叉树 T 的每个分支上都有一个失败结点. 删去每个分支中失败结点以下的部分，可得 T 的一个子树 T'. 因为 T' 的每个分支的长度均有限，所以由引理 5.5.2 知 T' 中有一最长的分支. 设其长度为 l，则 T' 中的叶子(即分支末端)的个数不超过 2^l. 所以 T' 是一个有限的二叉树，称 T' 为 S 的**有限封闭语义树**.

例 5.5.5　在图 5.5.2 的完全二叉语义树 T 中，一共有 3 个失败结点 N_1，N_2 和 N_3. 以 N_2 为例，其中的 $P(f(a))$ 表示 $f(a) \in \bar{P} = P$，但 S 中有子句 $\neg P(f(a))$，所以 $f(a)$ 使 $\neg\bar{P}$ 不成立. 从而对 H- 解释 $\{P(a), P(f(a)), Q(b)\}$ 而言 S 不真. 又，M 不是失败结点，所以对于 H- 解释 $I^* = \{P(a), \neg P(f(a)), Q(b)\}$ 而言，每个赋值 v 都满足 S. 事实上，因为 S 中没有变元，且 $v(a) = a$，$v(b) = b$ 恒成立. 所以当 $P(a)$，$\neg P(f(a))$ 和 $Q(b)$ 都成立时，

$$P(a) \wedge \neg P(f(a)) \wedge (\neg P(a) \vee Q(b))$$

成立.

例 5.5.6　在图 5.5.3 的树 T 中，有 3 个失败结点 N_1，N_2 和 N_3. 因为 T 的每个分支都包含有这 3 个失败结点之一，所以 $S = \{P(x), \neg P(x) \vee Q(f(x)), \neg Q(f(a))\}$ 有一个有限的封闭语义树 T' 如图 5.5.4.

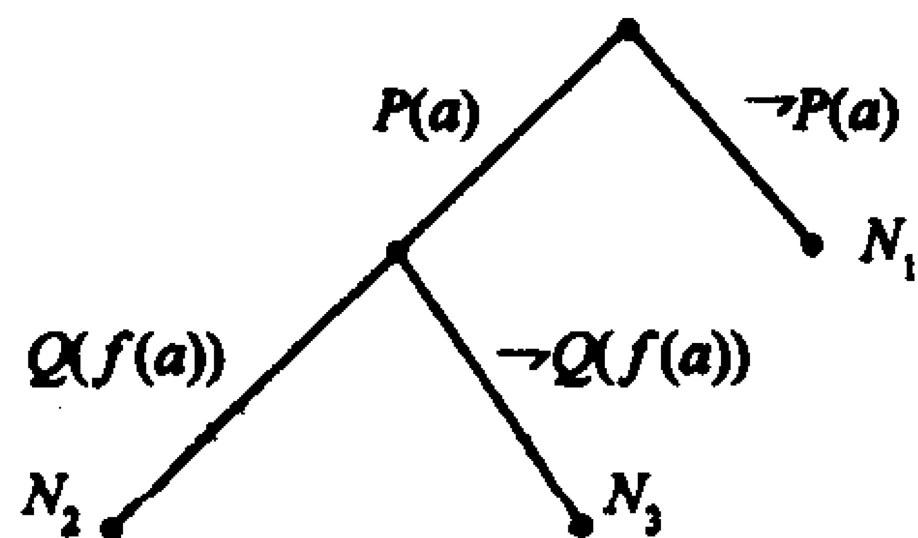


图 5.5.4

在 N_1 对应的任意一个解释 I_1^* 中(这种解释不止一个，有无穷多，但 N_1 以下部分已不必考虑了)，因为 S 的子句 $P(x)$ 的一个基例 $P(a)$ 已经在 I_1^* 之下不真，所

以 $I_1^* \models S$ 不成立. 对于 N_2 对应的任意一个解释 I_2^* 而言, 因为基例 $\neg Q(f(a))$ 已不成立, 所以 $I_2^* \models S$ 不成立. 对于 N_3 而言, 相应的任意一个解释 I_3^*, $I_3^* \models \neg P(x) \vee Q(f(x))$ 都不成立 (令 $v(x) = a$ 即可看出), 从而 $I_3^* \models S$ 不成立.

设 S 是有限子句集. 如果对 $\mathscr{L}$ 的任一解释 I, $I \models S$ 都不成立, 则对任一 H- 解释 I^*, $I^* \models S$ 自然也不成立, 从而由基本事实 5.5.1 的(iv) 知 S 的完全二叉语义树含有有限的封闭语义树. 反过来, 如果 S 的完全二叉语义树含有封闭的语义树, 则对每个 H- 解释 I^* 而言, $I^* \models S$ 不成立, 那么由命题 5.5.2 知对任何解释 I, $I \models S$ 都不成立. 这就证明了下面的定理.

定理 5.5.1(Herbrand 定理 Ⅰ) 有限子句集 S 不可满足的充要条件是 S 的完全二叉语义树含有有限的封闭语义树.

还有一个 Ⅱ - 型的 Herbrand 定理如下:

命题 5.5.3(Herbrand 定理 Ⅱ) 有限子句集 S 不可满足的充要条件是 S 有不可满足的有限基例集 S'.

证明 设对任一解释 I, $I \models S$ 都不成立, 则 S 的完全二叉语义树 T 有一有限的封闭子树 T'. T' 的每个失败结点都使 S 的某个子句的基例不成立, 以 S' 记全部这种基例之集, 则因 T' 只含有限多个失败结点, S' 是有限集. 因为 T 的每个分支, 即每个 H- 解释都使 S' 不真, 所以由命题 5.5.2 知对任意的解释 I 而言 $I \models S'$ 均不成立.

反过来, 设 S 有一有限的基例集 S', S' 在任何解释中都不真. 设 I^* 是 S 的任一 H- 解释. 则 I^* 包含了 S' 的一个解释 I'. 因为 $I' \models S'$ 不成立, 所以 $I^* \models S'$ 不成立, 这时 S' 中有 C' 使 $I^* \models C'$ 不成立. 因为 C' 是 S 中子句 C 的基例, 所以 $I^* \models S$ 不成立. 从而由 I^* 的任意性知 S 不可满足.

例 5.5.7 设 S 如例 5.5.4 所述, 则 S 有一有限的基例集

$$S' = \{P(a), \neg Q(f(a)), \neg P(a) \vee Q(f(a))\},$$

S' 在任意解释 I 之下都不真. 这里图 5.5.4 中的失败结点 N_1 使 S 的子句 $P(x)$ 的基例 $P(a)$ 不成立, N_2 使 S 的子句 $\neg Q(f(a))$ 的基例(即它自身)不成立, 最后, N_3 使 S 的子句 $\neg P(x) \vee Q(f(x))$ 的基例 $\neg P(a) \vee Q(f(a))$ 不成立.

习 题 5.5

1. 求子句集 S 的 Herbrand 域, 设

(i) $S = \{P(a), Q(f(a))\}$.

(ii) $S = \{P(x), R(f(x))\}$.

(iii) $S = \{P(x) \vee \neg Q(x,y), R(f(x), g(b)) \vee \neg P(g(y))\}$.

2. 设子句集 $S = \{P(x,y,f(x)), Q(g(y)) \vee \neg R(a)\}$.

(i) 写出 S 的 5 个基原子.

(ii) 写出 S 中子句的 5 个基例.

3. 画出以下各子句集的完全二叉语义树：

(i) $S=\{P(x),\neg P(f(a))\}$.

(ii) $S=\{P(a),Q(b),R(c)\}$.

(iii) $S=\{P(x),\neg P(x)\vee Q(f(x)),\neg Q(f(a))\}$.

4. 在上题中哪些 S 有有限的封闭语义树?画出这些树来.

5. 设 $S=\{\neg P(x)\vee Q(f(x),x),P(g(b)),\neg Q(y,z)\}$. 找出 S 的子句的有限个基例之集 S',使 S' 在任一解释下都不真.

5.6　Davis 与 Putnam 方法

设 S 是有限的子句集. 由 Herbrand 第二定理,为证明 S 是不可满足的,可找出 S 的有限的不可满足的基例集来. 反过来,当 S 可满足时,找出 S 的不可满足的有限基例集的操作就停不下来,同时也不能断言 S 是可满足的,因为我们不知道究竟是 S 确有不可满足的有限基例集只是我们尚未找出呢还是 S 根本就没有有限的不可满足的基例集. 所以 Herbrand 方法并不是关于 S 的,不可满足性的可判定方法,它只是一种半可判定方法,它只适用于 S 不可满足的情形.

为找出 S 的不可满足的有限基例集,Gilmore 曾提出一种分级找寻法,即,以 S_i' 表示将 S 的 Herbrand 域中的 H_i 中的元代入 S 的各子句中的变元处所得的基例集($i=0,1,2,\cdots$),试图找出一个自然数 N 来使 S_N' 是不可满足的. 举例如下：

例 5.6.1　(i) 设 $S=\{A(x,y),\neg A(a,b)\}$,则 $H_0=\{a,b\}$,$S_0'=\{A(a,a),A(a,b),A(b,a),A(b,b),\neg A(a,b)\}$. 因为 S_0' 含有相反的文字 $A(a,b)$ 与 $\neg A(a,b)$,所以 S_0' 就是 S 的不可满足的有限基例集.

(ii) 设 $S=\{P(x,f(x)),\neg P(f(y),z)\}$,则 $H_0=\{a\}$,$S_0'=\{P(a,f(a)),\neg P(f(a),a)\}$,$S_1'=\{P(a,f(a)),P(f(a),f(f(a))),\neg P(f(a),a),\neg P(f(a),f(a)),\neg P(f(f(a)),a),\neg P(f(f(a)),f(a))\}$,$S_2'=\{P(a,f(a)),P(f(a),f(f(a))),\cdots,\neg P(f(a),f(f(a))),\cdots\}$.

因为 S_2' 中已出现相反的文字对,所以 S_2' 是不可满足的 S 的有限基例集.

Gilmore 曾利用计算机针对一个子句集分别求 $S_0',S_1',S_2',\cdots$ 但这一方法不大实用. 因为当 S 中子句较多或函数符号与个体常元符号较多时这种方法的计算量太大. 后来 Davis 与 Putnam 针对由这种基例组成的子句集提出了证明 S 的不可满足性的 4 条简化方法.

Davis 与 Putnam 规则包括：

规则 1(重言式删去规则)　将 S 中的重言式删去后得子句(基例)集 S',则 S 不可满足当且仅当 S' 不可满足.

规则 2(单文字规则) 设 S 含有单子句的基例 L,从 S 中删去含有 L 的基例,得一基例集 S'. 则

(i) 若 $S' = \varnothing$,则 S 是可满足的.

(ii) 若 $S' \neq \varnothing$,从 S' 的各子句中删去 $\neg L$ 后得一基例集 S'',则 S 不可满足当且仅当 S'' 不可满足.

规则 3(纯文字规则) 称子句集 S 的某基例中出现的文字 L 为纯文字,如果 $\neg L$ 不在 S 的基例中出现. 删去 S 中含有 L 的基例得一基例集 S'. 设 $S' \neq \varnothing$,则 S 不可满足当且仅当 S' 不可满足.

规则 4(分离规则) 设

$$S = \{A_1 \lor L, \cdots, A_m \lor L, B_1 \lor \neg L, \cdots, B_n \lor \neg L, R\}, \qquad (5.6.1)$$

这里 L 与 $\neg L$ 都不在 A_i 与 B_j 中出现($i = 1, \cdots, m; j = 1, \cdots, n$). 设

$$S_1 = \{A_1, \cdots, A_m, R\}, \qquad (5.6.2)$$

$$S_2 = \{B_1, \cdots, B_n, R\}, \qquad (5.6.3)$$

则 S 不可满足当且仅当 S_1 与 S_2 都不可满足.

现在来证明以上 4 条规则的合理性. 第 1 条规则显然是成立的. 以下证明规则 2 ~ 4 是合理的. 注意 S 中各子句均不含变元,所以说 S 可满足等价于说 $\mathscr{L}$ 有解释 I 以及 $\mathscr{L}$ 在 I 中的一个赋值 v,v 满足 S 中的各子句. 所以对任一基例 C,$I \models C$ 与 $I \models \neg C$ 必有一个且仅有一个成立.

规则 2 的合理性证明 在情形(i) 时有

$$S = \{L, A_1 \lor L, \cdots, A_m \lor L\}.$$

因为 L 是文字,容易作出 L 的模型 I,这时显然 $I \models S$,所以 S 可满足. 在情形(ii),

$$S = \{L, A_1 \lor L, \cdots, A_m \lor L, B_1 \lor \neg L, \cdots, B_n \lor \neg L, C_1, \cdots, C_k\},$$

$$S' = \{B_1 \lor \neg L, \cdots, B_n \lor \neg L, C_1, \cdots, C_k\},$$

$$S'' = \{B_1, \cdots, B_n, C_1, \cdots, C_k\}.$$

设 S 有模型 I,则显然 $I \models S'$,又 $I \models L$,所以 $I \models (B_i \lor \neg L) \land L$,从而 $I \models B_i$($i = 1, \cdots, n$). 可见 $I \models S''$. 反过来,设 S'' 有模型 I,即 $I \models S''$. 因为文字 L 与 $\neg L$ 均不在 S'' 中出现,可适当修改解释 I 为 I_1 使 $I_1 \models S''$ 且 $I_1 \models L$,这时 I_1 就是 S 的模型. 从而 S 可满足.

例 5.6.2 设 $S = \{P \lor \neg P, R, A \lor R, B \lor R, C \lor \neg R, \neg C\}$,试证 S 不可满足.

证明 (1) $(P \lor \neg P) \land R \land (A \lor R) \land (B \lor R) \land (C \lor \neg R) \land \neg C$ $\qquad S$

(2) $R \land (A \lor R) \land (B \lor R) \land (C \lor \neg R) \land \neg C$ $\qquad$ 规则 1

(3) $C \land \neg C$ $\qquad R$,规则 2

(4) $\square$

这里 $\square$ 代表空子句. 当相反的文字对(即互补对) 出现时,其合取自然为矛盾

式,我们简捷地写出空子句表示这一事实(参看定义 6.1.1 和定义 6.1.2).

规则 3 的合理性证明　设

$$S=\{A_1\vee L,\cdots,A_m\vee L,B_1,\cdots,B_n\},$$

且 L 与 $\neg L$ 不在 $B_1,\cdots,B_n$ 中出现,所以

$$S'=\{B_1,\cdots,B_n\}.$$

设 S 可满足,则显然 S' 也可满足.反过来,设 S' 可满足,I 是 S' 的模型.因为 $\neg L$ 不在 S' 中出现,可设 $I\models L$,这时显然 $I\models S$.

例 5.6.3　设 $S=\{A\vee B,A\vee\neg B,C\vee B,C\vee\neg B,B,\neg C\}$,试证 S 不可满足.

证明　(1) $(A\vee B)\wedge(A\vee\neg B)\wedge(C\vee B)\wedge(C\vee\neg B)\wedge B\wedge\neg C$　　S

(2) $(C\vee B)\wedge(C\vee\neg B)\wedge B\wedge\neg C$　　A,规则 3

(3) $C\wedge\neg C$　　B,规则 2

(4) $\square$

规则 4 的合理性证明　设 S,S_1 与 S_2 分别如式(5.6.1),式(5.6.2)和式(5.6.3)所述.如果 S 有模型 I,则 $I\models L$ 与 $I\models\neg L$ 有一个且仅有一个成立.比如设 $I\models L$,则由 $I\models(B_i\vee\neg L)$ 知 $I\models B_i(i=1,\cdots,n)$.所以 $I\models S_2$.同理,若 $I\models\neg L$,则 $I\models S_1$,可见若 S_1 与 S_2 都不可满足,则 S 不可满足.反过来,设 S_1 有模型 I,则因 A_i 与 B_j 中均不含 L 和 $\neg L(i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n)$,可以设 $I\models\neg L$,这时显然 $I\models S$.同理可证若 S_2 有模型 I,则 S 也可满足.可见当 S 不可满足时 S_1 与 S_2 都不可满足.

例 5.6.4　设

$S=\{P\vee Q,A\vee P\vee Q,B\vee P\vee Q,C\vee P\vee\neg Q,\neg P\vee D,\neg P\vee D\vee C,\neg P\vee\neg D\vee C,\neg C\}$.

试证 S 不可满足.

证明　注意 P 与 $\neg P$ 在 S 中的位置可得

$$S_1=\{Q,A\vee Q,B\vee Q,C\vee\neg Q,\neg C\},$$
$$S_2=\{D,D\vee C,\neg D\vee C,\neg C\}.$$

由 S_1 及规则 2 可得 $S_1''=\{C,\neg C\}$,显然 S_1'' 不可满足,所以 S_1 不可满足.由 S_2 及规则 2 可得 $S_2''=\{C,\neg C\}$.由 S_2'' 不可满足知 S_2 不可满足.所以由规则 4 知 S 不可满足.

习　题　5.6

1. 使用 Davis 与 Putnam 方法证明以下各子句集 S 可满足:

(i) $S=\{P\vee Q,\neg P\vee Q,R\}$.

(ii) $S=\{A \vee \neg A, B, B \vee C, B \vee D, B \vee E, \neg B \vee H\}$.

以上各大写字母均表示不含变元的原子公式.

2. 使用 Davis 与 Putnam 方法证明以下各子句集 S 不可满足:

(i) $S=\{A \vee B, \neg A \vee B, \neg C \vee \neg B, C \vee \neg B\}$.

(ii) $S=\{P \vee A, P \vee B, P \vee C, A \vee B, \neg A \vee B, \neg C \vee \neg B, C \vee \neg B\}$.

(iii) $S=\{P, P \vee A \vee B, P \vee \neg A \vee B, \neg P \vee B, \neg P \vee \neg C \vee \neg B, \neg P \vee C \vee \neg B\}$.

第6章 归结原理

设S是有限的子句集,为证明S是不可满足的,可以利用Herbrand第一定理证明S的完全二叉语义树有一个有限的封闭语义树,也可以利用Herbrand第二定理证明S有一个有限的不可满足的基例集,无论哪种方法都涉及S中子句的基例集.由于S中一个子句的基例是将该子句中的变元用Herbrand域$H = H_0 \cup H_1 \cup \cdots$中的元代换而得,所以如果$S$中的子句含有多个变元与函数符号,则仅用$H_1$中的元去代换时就可能产生出大量的基例来.比如,以只含两个单子句的下述S为例:$S = \{P(x,f(x),y,g(x,y),z,h(x,y,z)), \neg P(u,v,k(u),w,l(u,w),x)\}$,则相应的Herbrand域的子集$H_0$是简单的,$H_0 = \{a\}$,这时

$$H_1 = \{a,f(a),g(a,a),h(a,a,a),k(a),l(a,a)\}.$$

由于S中的两个(单)子句各含有3个与4个变元,所以用H_1中的6个元作代换时各可产生6^3与6^4个基例来,共1512个基例.如果用H_2中的元去作代换,由于H_2中有66个元,将产生约2000万个基例来.由于这种增长速度是指数型的,所以直接应用Herbrand的两个定理去证明S的不可满足性往往是难以实现的.归结原理正是为克服这一困难而提出的,它是一种从子句集S出发逐步制作出新的所谓归结式来,最终导致矛盾式的出现以完成证明的方法.对于命题逻辑而言,由于一个公式是否为定理可在有限步之内判定,所以可以排除在本章的讨论之外,但为了说明归结原理的基本思想,我们还是在第一节中介绍了命题演算中的归结方法.由于谓词演算中的归结原理要复杂得多,本章在第二节先给出若干预备知识,然后在第三节中正式讨论归结方法.在第四节中证明归结方法的完备性定理,最后在第五节中介绍一些简化方法.

6.1 命题演算中的归结方法

在定义5.3.1中曾就系统$\mathscr{L}$定义了文字与子句等概念,这些概念对系统$\boldsymbol{L}$也适用,现在进一步给出如下定义:

定义6.1.1 在命题演算系统$\boldsymbol{L}$或谓词演算系统$\boldsymbol{K}_{\mathscr{L}}$中,称原子公式及其否定为文字,称有限多个文字的析取为子句.称只含一个文字的子句为**单子句**.称不含文字的子句为**空子句**,记为□.不是空子句的子句叫**非空子句**.又称原子公式和它的否定式为**互补**的文字.

定义6.1.2(命题演算中的归结原理) 设C_1和C_2是两个子句.如果C_1中有一个析取项L_1与C_2中的某析取项L_2互补,则分别从C_1与C_2中消去L_1与L_2,得

到两个较简单的子句 C_1' 与 C_2'. 称 $C_1' \vee C_2'$ 为 C_1 与 C_2 的**归结式**,这里约定 $\square \vee C_2' = C_2'$,$C_1' \vee \square = C_1'$,$\square \vee \square = \square$.

例 6.1.1 (i) 设 $C_1 = p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3$,$C_2 = p_1 \vee p_2$,则由 C_1 中的 $\neg p_2$ 与 C_2 中的 p_2 互补知 C_1 与 C_2 的归结式为 $p_1 \vee p_3$.

(ii) 设 $C_1 = p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3$,$C_2 = p_2 \vee \neg p_3$,则 $p_1 \vee p_3 \vee \neg p_3$ 与 $p_1 \vee \neg p_2 \vee p_2$ 都是 C_1 与 C_2 的归结式,它们都是重言式.

(iii) 设 $C_1 = p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3$,$C_2 = p_2$,则 C_1 与 C_2 的归结式为 $p_1 \vee p_3 \vee \square = p_1 \vee p_3$.

(iv) 设 $C_1 = \neg p_2$,$C_2 = p_2$,则 C_1 与 C_2 的归结式为 $\square$.

由定义 6.1.2 立即得出下面的命题.

命题 6.1.1 设 C_1 与 C_2 是二非空子句,C 是 C_1 与 C_2 的归结式,则以下各条彼此等价:

(i) $C = \square$.

(ii) C_1 与 C_2 是互补的文字.

(iii) $C_1 \wedge C_2$ 是矛盾式.

二子句 C_1 与 C_2 和它们的归结式 C 的一般关系如下:

命题 6.1.2 设 C_1 与 C_2 是二非空子句,C 是 C_1 与 C_2 的归结式,则当 C 为非空子句时 $C_1 \wedge C_2 \to C$ 是重言式.

证明 由定义 6.1.2 知 C_1、C_2 与 C 可分别写为 $C_1' \vee L$、$C_2' \vee \neg L$ 与 $C_1' \vee C_2'$. 先设 C_1' 与 C_2' 都不是空子句. 任取赋值 $v \in \Omega$,设 $v(C_1 \wedge C_2) = 1$,则由 v 保运算 $\wedge$, $\vee$ 和 $\neg$ 得

$$(v(C_1') \vee v(L)) \wedge (v(C_2') \vee (1 - v(L))) = 1.$$

从而 $v(C_1') \vee v(L) = v(C_2') \vee (1-v(L)) = 1$. 若 $v(C_1') = v(C_2') = 0$,则 $v(L) = 1-v(L)$,即 $2v(L) = 1$. 此式显然不能成立,所以 $v(C_1')$ 与 $v(C_2')$ 至少有一个为 1,从而 $v(C) = v(C_1') \vee v(C_2') = 1$. 由 v 的任意性知 $C_1 \wedge C_2 \to C$ 为重言式. 如果 C_1' 与 C_2' 中有一个为空子句,比如 $C_1' = \square$,则 $C_1 \wedge C_2 = L \wedge (C_2' \vee \neg L) = (L \wedge C_2') \vee (L \wedge \neg L) \approx L \wedge C_2'$. 这时 $C = C_2'$,所以 $C_1 \wedge C_2 \to C = L \wedge C_2' \to C_2'$ 显然是重言式. 由 C 为非空子句知 C_1' 与 C_2' 不可能全为空子句,所以命题 6.1.2 成立.

注 6.1.1 (i) 如果约定当 $C_1 \wedge C_2$ 为矛盾式时 $C_1 \wedge C_2 \to \square$ 为重言式,则上述命题中也可不要求归结式 C 为非空子句.

(ii) 上述命题在谓词演算系统中也成立,并可表述为"$C_1 \wedge C_2 \to C$ 是逻辑有效公式",这是因为 $\boldsymbol{L}$ 中重言式的代换实例在 $\boldsymbol{K}_{\mathscr{L}}$ 中是逻辑有效的. 其实从命题 6.1.2 的证明过程可以看出,若 I 是 $C_1 \wedge C_2$ 的模型,则 I 也是 C 的模型,特别是如果 C 不可满足,则 $C_1 \wedge C_2$ 不可满足,即 $\{C_1, C_2\}$ 不可满足.

(iii) 相反的蕴涵式 $C \to C_1 \wedge C_2$ 不必为重言式,即,$C_1 \wedge C_2$ 与 C 不必是逻辑

等价的. 比如,设 C_1 与 C_2 如例 6.1.3(iii) 所述,则 $C_1 \wedge C_2 \approx p_2 \wedge (p_1 \vee p_3)$,$C = p_1 \vee p_3$,这时 $p_1 \vee p_3 \to p_2 \wedge (p_1 \vee p_3)$ 显然不是重言式,这一点从取赋值 v 使 $v(p_1) = v(p_3) = 1$ 且 $v(p_2) = 0$ 可立即看出.

定义 6.1.3　设 S 是非空子句集,C 是一个子句. 从 S 到 C **的归结推理**是一个子句的有限序列 $C_1, \cdots, C_n$,这里 $C_n = C$,且对每个 $i \leqslant n$,$C_i \in S$ 或存在 $j, k < i$ 使 C_i 是 C_j 与 C_k 的归结式. 从 S 到空子句 □ 的归结推理叫 **S 的证明**.

例 6.1.2　设 $S = \{p \vee q \vee r, \neg p \vee q, p \vee \neg q, \neg p \vee \neg q, q \vee \neg r\}$,则以下是 S 的一个证明:

(1)	$p \vee q \vee r$	S
(2)	$\neg p \vee q$	S
(3)	$p \vee \neg q$	S
(4)	$\neg p \vee \neg q$	S
(5)	$q \vee \neg r$	S
(6)	$q \vee r$	(1),(2)
(7)	q	(5),(6)
(8)	$\neg q$	(3),(4)
(9)	□	(7),(8)

本例中 S 有一有限封闭语义树如图 6.1.1.

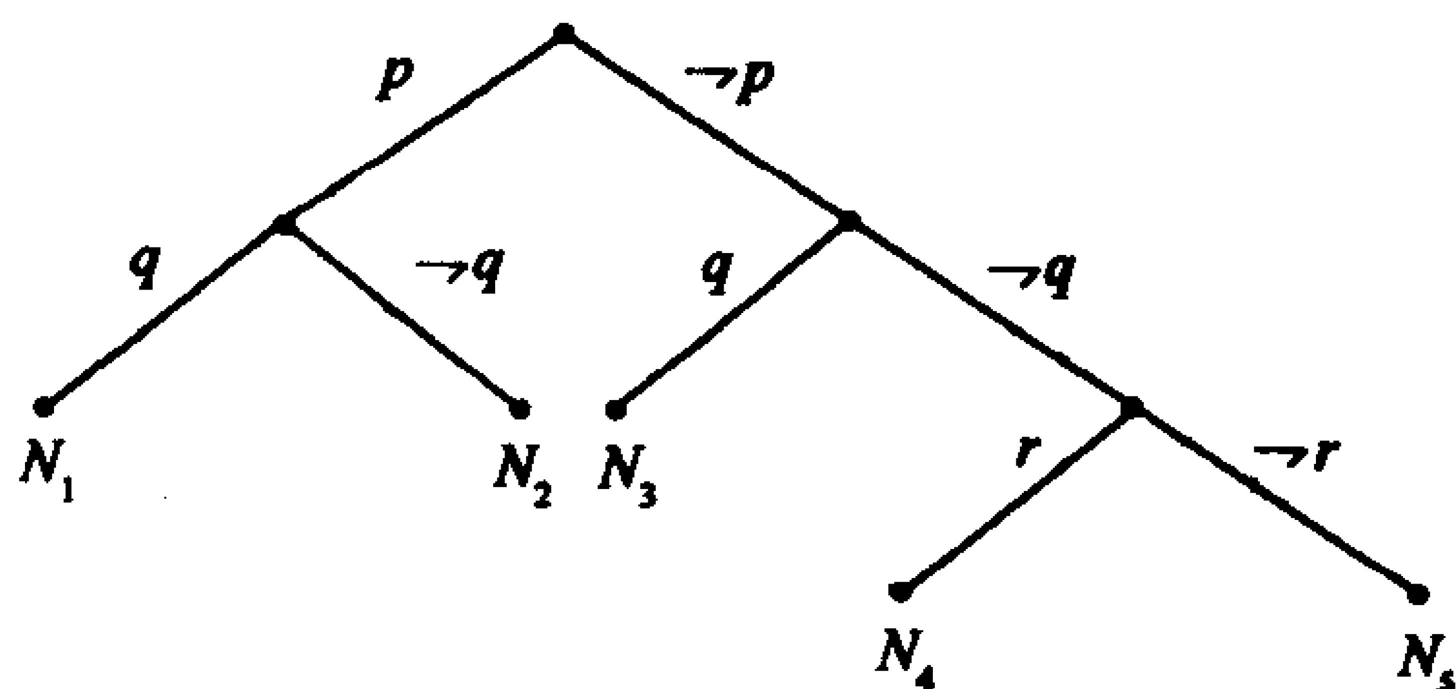


图 6.1.1

命题 6.1.3(命题逻辑中归结原理的完备性定理)　子句集 S 不可满足当且仅当 S 有一个归结证明.

证明　设 S 可满足,则 S 有模型 I. 由命题 6.1.5 知当 I 满足两个子句时也满足它们的归结式. 因为 I 满足 S 中的每个子句,且 I 不满足空子句 □,所以从 S 不能归结出空子句 □ 来,即,S 没有证明.

反过来,设 S 不可满足,则由 Herbrand 定理知 S 有一个有限封闭语义树 T. 任取 T 中两个相邻的失败结点 N_1 与 N_2,以 N 记与 N_1,N_2 相邻的上方结点. 设从根起向下到 N 的各边上的文字(即原子命题 p_i 或其否定 $\neg p_i$)依次为 $m_1, m_2, \cdots, m_n$,则从根起到 N_1 与 N_2 的各边上的文字分别依次为

$$m_1, m_2, \cdots, m_n, m_{n+1} \text{ 和 } m_1, m_2, \cdots, m_n, \neg m_{n+1}.$$

因为 N 不是失败结点，所以 S 中有二子句 C_1 与 C_2 分别关于 N_1 与 N_2 为假但关于 N 都为真. 可见 C_1 与 C_2 分别具有形式

$$C_1 = \neg m_{i_1} \vee \cdots \vee \neg m_{i_k} \vee \neg m_{n+1}, 1 \leqslant i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_k \leqslant n,$$

$$C_2 = \neg m_{j_1} \vee \cdots \vee \neg m_{j_l} \vee m_{n+1}, 1 \leqslant j_1 \leqslant \cdots \leqslant j_l \leqslant n.$$

这时 C_1 与 C_2 有一归结式

$$C = (\bigvee_{t=1}^{k} \neg m_{i_t}) \vee (\bigvee_{r=1}^{l} \neg m_{j_r}).$$

把 C 添加到 S 中去，则由 S 不可满足知 $S \cup \{C\}$ 也不可满足. 设 $e = \max\{i_k, j_l\}$，则由 T 的根出发经过边 $m_1, m_2, \cdots, m_e (e \leqslant n)$ 所到的结点 N^* 已经使 C 为假了. 从 T 中删去 N^* 以下的部分可得一比 T 真小的树 T'. T' 是 $S \cup \{C\}$ 的封闭语义树，因为 T' 的每个叶子都使 $S \cup \{C\}$ 中的某个子句为假. 以 T' 作为 T 再作如上处理，可由 $S \cup \{C\}$ 得出一个归结式 $\overline{C}$，使 $S \cup \{C, \overline{C}\}$ 有节点比 T' 更少的封闭语义树 T''. 以此类推最终可得一仅含三个节点的语义树 T_0，它除根之外有两个失败结点. 设相应的两条边上的文字分别为 p 与 $\neg p$，则由 p 与 $\neg p$ 就归结出 $\square$. 所以 S 有一个归结证明.

6.2 置换与合一

前面曾说过，谓词演算中的归结方法比命题演算中的归结方法要复杂得多，这是因为在 $\mathbf{K}_{\mathscr{L}}$ 中原子公式还有内部结构，其中可以出现变元、个体常元和函数符号，这时相应的归结原理与变元的代换有关，远比定义 6.1.2 中的情形复杂. 本节先来为这种一般的归结原理做好概念上的准备.

6.2.1 置换

定义 6.2.1 设 $\mathscr{L}$ 是一阶语言，$x_1, \cdots, x_n$ 是不同的变元，$t_1, \cdots, t_n$ 是项，且 $t_i \neq x_i (i = 1, \cdots, n)$，则

(i) 称 $\theta = \{t_1/x_1, \cdots, t_n/x_n\}$ 为**置换**(substitution).

(ii) 当 $n = 0$，即 θ 为空集时称 θ 为**空置换**，记为 ε.

(iii) 如果对每个 $i \leqslant n$，$t_i \in H$，这里 H 是 $\mathscr{L}$ 中某子句集 S 的 Herbrand 域，则称 t_i 为**基项**(ground term)，称 θ 为**基置换**(ground substitution).

定义 6.2.2 设 $\mathscr{L}$ 是一阶语言，E 是 $\mathscr{L}$ 中的项或 E 是原子公式，则称 E 为**表达式**. 设 $\theta = \{t_1/x_1, \cdots, t_n/x_n\}$ 是置换. 把 E 中属于 $\{x_1, \cdots, x_n\}$ 的变元 $x_{i_1}, \cdots, x_{i_k}$ 分别用 $t_{i_1}, \cdots, t_{i_k}$ 去代换，将所得结果记为 $E\theta$，称为 E 的**经置换 θ 所得的例**，简称为 E 的**例**(instance). 当 $\theta = \varepsilon$ 时约定 $E\varepsilon = E$.

例 6.2.1 (i) 设 $E = f(x, g(y), z)$，$\theta = \{a/x, z/y, b/z\}$，则 $E\theta = f(a, g(z), b)$.

(ii) 设 $E = Q(x, f(y), g(z))$，$\theta = \{f(a)/x, b/y, h(c)/z\}$，则 θ 是基置换，$E\theta = Q(f(a), f(b), g(h(c)))$.

(iii) 设 E 同(ii)，$\theta = \{f(a)/x\}$，则 $E\theta = Q(f(a), f(y), g(z))$. 又，若 $\theta = \{a/u, b/v\}$，则 $E\theta = E$. 若 $\theta = \varepsilon$，则也有 $E\varepsilon = E$.

定义 6.2.3　设 $\theta = \{t_1/x_1, \cdots, t_n/x_n\}$ 与 $\lambda = \{u_1/y_1, \cdots, u_m/y_m\}$ 是两个置换. 令

$$\xi = \{t_1\lambda/x_1, \cdots, t_n\lambda/x_n, u_1/y_1, \cdots, u_m/y_m\},$$

在 ξ 中删去以下的元：

(i) 若 $t_i\lambda = x_i$，则删去 $t_i\lambda/x_i (1 \leqslant i \leqslant n)$.

(ii) 若 $y_j \in \{x_1, \cdots, x_n\}$，则删去 $u_j/y_j (1 \leqslant j \leqslant m)$.

以 $\theta \circ \lambda$ 记所得之集，称 $\theta \circ \lambda$ 为 θ 与 λ 的**复合置换**.

注 6.2.1　上述复合置换的定义是自然的：(i) 置换 θ 把 x_i 换为 t_i，t_i 中可能含有 $\{y_1, \cdots, y_m\}$ 中的变元，再经置换 λ 的把 t_i 换为 $t_i\lambda$，所以最终 $\theta \circ \lambda$ 把 x_i 换为 $t_i\lambda$. 这正是复合的特征所在. (ii) 上述定义中的第1条删除反映了“删去无用代换”的原则. 因为 $u_1, \cdots, u_m$ 中可能含有变元 x_i，所以 $t_i\lambda = x_i$ 是可能的，这时形如 x_i/x_i 的代换是无用的，应当删去. (iii) 上述定义中的第 2 条删除体现了“先入为主”的原则. 比如，设 $y_1 = x_2$，则因置换 θ 在前，这时 x_2 已经被 t_2 所代换，就不能再把 x_2（即 y_1）换为 u_1 了. 所以要删去 u_1/y_1. 对于不属于 $\{x_1, \cdots, x_n\}$ 的那些 y_j 而言，代换 u_j/y_j 是后继置换 λ 提出的要求，自然应当保留于 ξ 之中. (iv) 读者可自行证明 $(E\theta)\lambda = E(\theta \circ \lambda)$.

例 6.2.2　(i) 设 $\theta = \{f(y)/x, z/y\}$，$\lambda = \{a/x, b/y, y/z\}$，则 $\xi = \{f(y)\lambda/x, z\lambda/y, a/x, b/y, y/z\} = \{f(b)/x, y/y, a/x, b/y, y/z\}$. 按定义 6.2.3 中的第 1 条删除要求，应当把 y/y 删去，按第二条删除要求，应当把 $a/x, b/y$ 删去，所以 $\theta \circ \lambda = \{f(b)/x, y/z\}$.

(ii) 设 θ 与 λ 同(i)，$\eta = \{g(z)/y, y/x\}$，这里 $g(z) \neq z$，则

$$\begin{aligned}(\theta \circ \lambda) \circ \eta &= \{f(b)/x, y/z\} \circ \{g(z)/y, y/x\} \\ &= \{f(b)/x, g(z)/z, g(z)/y\}.\end{aligned}$$

这时

$$\lambda \circ \eta = \{a/x, b/y, y/z\} \circ \{g(z)/y, y/x\} = \{a/x, b/y, g(z)/z\},$$

所以

$$\begin{aligned}\theta \circ (\lambda \circ \eta) &= \{f(y)/x, z/y\} \circ \{a/x, b/y, g(z)/z\} \\ &= \{f(b)/x, g(z)/y, g(z)/z\},\end{aligned}$$

可见 $(\theta \circ \lambda) \circ \eta = \theta \circ (\lambda \circ \eta)$.

命题 6.2.1　置换的复合运算满足结合律，即，设 θ, λ, η 是任意的置换，则

$$(\theta \circ \lambda) \circ \eta = \theta \circ (\lambda \circ \eta). \tag{6.2.1}$$

证明　设

$$\left.\begin{aligned}\theta &= \{t_1/x_1,\cdots,t_n/x_n\}, X = \{x_1,\cdots,x_n\}\\ \lambda &= \{u_1/y_1,\cdots,u_m/y_m\}, Y = \{y_1,\cdots,y_m\}\\ \eta &= \{v_1/z_1,\cdots,v_k/z_k\}, Z = \{z_1,\cdots,z_k\}\end{aligned}\right\} \tag{6.2.2}$$

再设

$$X_0 = \{x_i \mid t_i\lambda = x_i, x_i \in X\}.$$

则由定义 6.2.3 和式(6.2.2) 得

$$\theta \circ \lambda = \{t_i\lambda/x_i \mid x_i \in X - X_0\} \cup \{u_j/y_j \mid y_j \in Y - X\}. \tag{6.2.3}$$

注意$(X - X_0) \cup (Y - X) = (X \cup Y) - X_0$,由式(6.2.2) 和式(6.2.3) 得

$$\begin{aligned}(\theta \circ \lambda) \circ \eta = &\{(t_i\lambda)\eta/x_i \mid (t_i\lambda)\eta \neq x_i, x_i \in X - X_0\}\\ &\cup \{u_j\eta/y_j \mid u_j\eta \neq y_j, y_j \in Y - X\} \cup \{v_s/z_s \mid z_s \notin X \cup Y\}\\ &\cup \underline{\{v_s/z_s \mid z_s \in X_0\}.}\end{aligned} \tag{6.2.4}$$

类似地,由式(6.2.2) 得

$$\lambda \circ \eta = \{u_j\eta/y_j \mid u_j\eta \neq y_j, y_j \in Y\} \cup \{v_s/z_s \mid z_s \notin Y\}. \tag{6.2.5}$$

再由式(6.2.2) 与式(6.2.5) 得

$$\begin{aligned}\theta \circ (\lambda \circ \eta) = &\{t_i(\lambda \circ \eta)/x_i \mid t_i(\lambda \circ \eta) \neq x_i, x_i \in X\}\\ &\cup \{u_j\eta/y_j \mid u_j\eta \neq y_j, y_j \in Y - X\} \cup \{v_s/z_s \mid z_s \notin X \cup Y\}\\ = &\{t_i(\lambda \circ \eta)/x_i \mid t_i(\lambda \circ \eta) \neq x_i, x_i \in X - X_0\}\\ &\cup \underline{\{t_i(\lambda \circ \eta)/x_i \mid t_i(\lambda \circ \eta) \neq x_i, x_i \in X_0\}}\\ &\cup \{u_j\eta/y_j \mid u_j\eta \neq y_j, y_j \in Y - X\} \cup \{v_s/z_s \mid z_s \notin X \cup Y\}.\end{aligned} \tag{6.2.6}$$

比较式(6.2.4) 与式(6.2.6) 及下画黑线的部分可知,为证明式(6.2.1) 成立,只需证明

(i) $(t\lambda)\eta = t(\lambda \circ \eta)$,这里 t 是 $\mathscr{L}$ 中的任一项.

(ii) $\{v_s/z_s \mid z_s \in X_0\} = \{t_i(\lambda \circ \eta)/x_i \mid t_i(\lambda \circ \eta) \neq x_i, x_i \in X_0\}$.

先来证明(i). 设t是$\mathscr{L}$中的个体常元,a 或t 是$\mathscr{L}$中的变元且此变元不属于$Y \cup Z$,则$(t\lambda)\eta = t = t(\lambda \circ \eta)$. 若 $t = y_j$,则 $t\lambda = u_j$,这时$(t\lambda)\eta = u_j\eta$. 由式(6.2.5) 知如果 $u_j\eta \neq y_j$,则 $t(\lambda \circ \eta) = u_j\eta$;如果 $u_j\eta = y_j$,则 y_j 不在$\lambda \circ \eta$中各斜杠下出现,从而仍有 $t(\lambda \circ \eta) = y_j(\lambda \circ \eta) = y_j = u_j\eta$. 设对于不超过 n 级的项(参看定义 4.5.1) 已证明(i) 成立,今 $t = f(t_1,\cdots,t_l)$, $t_1,\cdots,t_l$ 是不超过n 级的项,且其中至少有一 n 级项,则由定义 6.2.2 知

$(t\lambda)\eta = f(t_1\lambda,\cdots,t_l\lambda)\eta = f((t_1\lambda)\eta,\cdots,(t_l\lambda)\eta) = f(t_1(\lambda \circ \eta),\cdots,t_l(\lambda \circ \eta)) = f(t_1,\cdots,t_l)(\lambda \circ \eta) = t(\lambda \circ \eta)$.

即$(t\lambda)\eta = t(\lambda \circ \eta)$ 对 $n+1$ 级项也成立. 这就证明了(i).

(ii) 设 $x_i \in X_0$,则 $t_i\lambda = x_i$,所以由(i) 知

$\{t_i(\lambda \circ \eta\} /x_i \mid t_i(\lambda \circ \eta) \neq x_i, x_i \in X_0\}$

$$= \{(t_i\lambda)\eta/x_i \mid (t_i\lambda)\eta \neq x_i, x_i \in X_0\}$$
$$= \{x_i\eta/x_i \mid x_i\eta \neq x_i, x_i \in X_0\}. \tag{6.2.7}$$

由 $x_i\eta \neq x_i$ 知 $x_i \in Z$,因为反之将有 $x_i\eta = x_i$,设 $x_i = z_s$,则 $x_i\eta = v_s$,所以由式(6.2.7)得

$$\{t_i(\lambda \circ \eta)/x_i \mid t_i(\lambda \circ \eta) \neq x_i, x_i \in X_0\} = \{x_i\eta/x_i \mid x_i\eta \neq x_i, x_i \in X_0\}$$
$$= \{v_s/z_s \mid z_s \in X_0\},$$

这就证明了(ii).

6.2.2 合一

定义 6.2.4 设$\{E_1,\cdots,E_n\}$是一组表达式,θ是一个置换.如果 $E_1\theta = \cdots = E_n\theta$,则称$\{E_1,\cdots,E_n\}$是**可合一的**(unifiable),称 θ 为$\{E_1,\cdots,E_n\}$的**合一置换**或**合一化子**(unifier).

例 6.2.3 (i) 设 $E_1 = P(x,y)$,$E_2 = P(a,f(z))$.令 $\theta = \{a/x, f(h(u))/y, h(u)/z\}$,则$E_1\theta = P(a,f(h(u)))$,$E_2\theta = P(a,f(h(u)))$.因为$E_1\theta = E_2\theta$,所以$\theta$是$E_1$与$E_2$的合一化子.

(ii) 设 E_1 与 E_2 同上,$\sigma = \{a/x, f(z)/y\}$,则 $E_1\sigma = P(a,f(z)) = E_2\sigma$,所以$\sigma$也是 E_1 与 E_2 的合一化子.

在上例中给出了$\{E_1,E_2\}$的两个合一化子θ与σ,显然σ比θ简单,且易验证$\theta = \sigma \circ \lambda$,这里 $\lambda = \{h(u)/z\}$.

定义 6.2.5 设$W = \{E_1,\cdots,E_n\}$是表达式之集,σ是其合一化子,如果对W的任一合一化子θ,存在相应的置换λ使$\theta = \sigma \circ \lambda$,则称$\sigma$为$W$的**最一般合一置换**或**最一般合一化子**.简称σ为W的 mgu(即 most general unifier 的缩写).

设E是一个表达式,比如$E = f(x,y,g(z))$,则E中含有$\mathscr{L}$的符号表中的11个符号.从左到右的第一个符号为 f,其次为(,…,最后为).以下把 E 的从左到右的第k 个符号简称为E 的第k 个符号.如,E 的第 5 个符号为 y,第 7 个符号为 g 等.

命题 6.2.2 设E_1与E_2是二不同的表达式,则E_1与E_2中序号最小的一对不同符号不可能是括号或逗号,只能是变元符号、个体常元符号、函数符号或谓词符号,且谓词符号只能出现于第一对符号之中.

证明 以 E_1 与 E_2 是项的情形为例进行证明.若 E_1 与 E_2 都是 1 级项,则 E_1 与 E_2 是变元符号或个体常元符号,命题中的结论自然成立.设当E_1与E_2是不超过k 级的项时结论成立,今 E_1 与 E_2 中至少有一个 $k+1$ 级项.不妨设 $E_1 = f(t_1,\cdots,t_n)$,$E_2 = g(s_1,\cdots,s_m)$.如果 $f \neq g$,则结论成立.设 $f = g$,则 $n = m$,$E_2 = f(s_1,\cdots,s_n)$.由 $E_1 \neq E_2$ 知有 $i \leqslant n$ 使$t_i \neq s_i$.取第一对不同的(t_i,s_i).这时 t_i 与s_i 中第一对不同的符号就是 E_1 与 E_2 的第一对不同的符号.由归纳假设知这一对符号不是括号或逗号.因为谓词符号只能是第一个符号,所以,当 E_1 与 E_2 是原子公式时,容易转化为以上情形完成证明.

定义 6.2.6 设 $W=\{E_1,\cdots,E_n\}$ 是表达式之集，且各 E_i 的前 $k-1$ 个符号都相同($i=1,\cdots,n$)。但有 E_i 与 E_j，其第 k 个符号不同($1\leqslant i,j\leqslant n$)。令 $E_i^{(k)}$ 的意义如下：当 E_i 的第 k 个符号是变元或常元或谓词符号时，$E_i^{(k)}$ 就表示该符号，当 E_i 的第 k 个符号是函数符号时，$E_i^{(k)}$ 表示以该函数符号开头的项. 称 $D=\{E_i^{(k)}\mid i=1,\cdots,n\}$ 为 W 的**不一致集**. 由命题 6.2.2 知不一致集中的元为项或谓词符号.

例 6.2.4 (i) 设 $E_1=f(x,y,g(z))$，$E_2=f(x,a,u)$，则 E_1 与 E_2 的不一致集 $D=\{y,a\}$.

(ii) 设 $E_1=P(f(y,z),u)$，$E_2=P(a,u)$，$E_3=P(g(y),h(u))$，则 $\{E_1,E_2,E_3\}$ 的不一致集 $D=\{f(y,z),a,g(y)\}$.

(iii) 设 $E_1=P(x,y,z)$，$E_2=Q(x,y)$，则 E_1 与 E_2 的不一致集 $D=\{P,Q\}$.

6.2.3 mgu 算法

下面介绍计算 $W=\{E_1,\cdots,E_n\}$ 的 mgu 或证明 W 不可合一的算法. 其基本思想是：从左到右逐步合一直至完全合一，如果到某一步无法合一，就表明 W 是不可合一的.

定义 6.2.7(mgu 算法) 设 $W=\{E_1,\cdots,E_n\}$ 是表达式之集.

第一步：设 $k=0$，令 $W_k=W$，令 $\sigma_k=\varepsilon$.

第二步：若 W_k 中只含一个表达式，停止，这时 σ_k 是 W 的 mgu. 否则就找出 W_k 的不一致集 D_k.

第三步：若 D_k 中有一个变元 x_k 以及不包含 x_k 的项 t_k，则转入第四步，否则停止，W 不可合一.

第四步：设 $\sigma_{k+1}=\sigma_k\circ\{t_k/x_k\}$，$W_{k+1}=W_k\{t_k/x_k\}$(易证 $W_{k+1}=W\sigma_{k+1}$).

第五步：设 $k=k+1$ 并转入第二步.

例 6.2.5 (i) 设 $W=\{E_1,E_2\}$，$E_1=f(x,y,g(y))$，$E_2=f(a,b,c)$. 则 $W_0=W$，$\sigma_0=\varepsilon$，$D_0=\{x,a\}$；$\sigma_1=\sigma_0\circ\{a/x\}$，$W_1=W_0\sigma_1=\{f(a,y,g(y)),f(a,b,c)\}$，$D_1=\{y,b\}$，$\sigma_2=\sigma_1\circ\{b/y\}$，$W_2=W_1\circ\{b/y\}=\{f(a,b,g(b)),f(a,b,c)\}$，$D_2=\{g(b),c\}$. 因为 D_2 中不含变元，所以 W 不可合一.

(ii) 设 $W=\{P(x,y,a,f(g(x))),P(b,f(v),z,f(u))\}$，则：

(1) $W_0=W$，$\sigma_0=\varepsilon$. $D_0=\{x,b\}$.

(2) $\sigma_1=\sigma_0\circ\{b/x\}$，$W_1=W_0\circ\{b/x\}=\{P(b,y,a,f(g(b))),P(b,f(v),z,f(u))\}$，$D_1=\{y,f(v)\}$.

(3) $\sigma_2=\sigma_1\circ\{f(v)/y\}$，$W_2=W_1\circ\{f(v)/y\}=\{P(b,f(v),a,f(g(b))),P(b,f(v),z,f(u))\}$，$D_2=\{a,z\}$.

(4) $\sigma_3=\sigma_2\circ\{a/z\}$，$W_3=W_2\circ\{a/z\}=\{P(b,f(v),a,f(g(b))),P(b,f(v),a,f(u))\}$，$D_3=\{g(b),u\}$.

(5) $\sigma_4 = \sigma_3 \circ \{g(b)/u\}, W_4 = W_3 \circ \{g(b)/u\} = \{P(b,f(v),a,f(g(b)))\}$. 因为 W_4 只含一个表达式，所以 W 是可合一的，W 的 mgu 是 $\sigma_4 = \sigma_3 \circ \{g(b)/u\} = \cdots = \sigma_0 \circ \{b/x\} \circ \{f(v)/y\} \circ \{a/z\} \circ \{g(b)/u\} = \{b/x, f(v)/y, a/z, g(b)/u\}$.

命题 6.2.3(mgu 算法的合理性定理)　设 $W = \{E_1, \cdots, E_n\}$ 是可合一的表达式之集($n \geqslant 1$)，则 mgu 算法停止于第二步，且相应的 σ_k 是 W 的 mgu.

证明　设 θ 是 W 的任一合一化子，我们证明对每个 σ_k，都有相应的置换 λ_k 使

$$\theta = \sigma_k \circ \lambda_k, \quad k = 0, 1, \cdots. \tag{6.2.8}$$

事实上，当 $k = 0$ 时令 $\lambda_k = \theta$，则由 $\sigma_0 = \varepsilon$ 知式(6.2.8)成立. 设已证当 $0 \leqslant k \leqslant m$ 时存在 λ_k 使式(6.2.8)成立. 如果 $W\sigma_m$ 已合一为一个表达式，则 mgu 算法停止于第二步，且由式(6.2.8)知 σ_m 是 W 的 mgu. 如果 $W\sigma_m$ 含多于一个表达式且其不一致集为 D_m，则因 $\theta = \sigma_m \circ \lambda_m$ 是 W 的合一化子，λ_m 是 $W\sigma_m$ 的合一化子，即，λ_m 是 D_m 的合一化子. 这时 D_m 中必有一变元 x_m 及不含此变元的项 t_m，这是因为任何置换都无法使不含变元的不一致集合一，也不能使同时含有 x_m 以及以 x_m 为变元的比 x_m 复杂的项合一. 所以 mgu 算法不会停止于第三步. 由 λ_m 是 D_m 的合一化子知 $x_m\lambda_m = t_m\lambda_m$. 由第四步，$\sigma_{m+1} = \sigma_m \circ \{t_m/x_m\}$. 令

$$\lambda_{m+1} = \lambda_m - \{t_m\lambda_m/x_m\}. \tag{6.2.9}$$

由 x_m 不在 t_m 中出现和式(6.2.9)知

$$t_m\lambda_{m+1} = t_m(\lambda_m - \{t_m\lambda_m/x_m\}) = t_m\lambda_m. \tag{6.2.10}$$

又，因为 λ_m 中只能有一个分母为 x_m 的元，所以 λ_{m+1} 不涉及对变元 x_m 的代换. 所以由式(6.2.10)与式(6.2.9)得

$$\begin{aligned}\{t_m/x_m\} \circ \lambda_{m+1} &= \{t_m\lambda_{m+1}/x_m\} \cup \lambda_{m+1} \\ &= \{t_m\lambda_m/x_m\} \cup (\lambda_m - \{t_m\lambda_m/x_m\}) \\ &= \lambda_m.\end{aligned}$$

那么由命题 6.2.1 得

$$\begin{aligned}\theta = \sigma_m \circ \lambda_m &= \sigma_m \circ (\{t_m/x_m\} \circ \lambda_{m+1}) \\ &= (\sigma_m \circ \{t_m/x_m\}) \circ \lambda_{m+1} = \sigma_{m+1} \circ \lambda_{m+1},\end{aligned}$$

即式(6.2.8)对 $k = m+1$ 成立. 所以式(6.2.8)对一切 k 都成立. 以上已证当 W 可合一时 mgu 算法不会停止于第三步，所以它对于某个 k 停止于第二步. 这个 σ_k 就是 W 的 mgu.

注 6.2.2　设 $W = \{\neg P_1, \cdots, \neg P_n\}$，这里 P_i 为原子公式($i = 1, \cdots, n$). 如果 $\{P_1, \cdots, P_n\}$ 可合一为 P，我们也称 W 可合一，且合一为 $\neg P$. 同时也称 $\{P_1, \cdots, P_n\}$ 的 mgu 为 W 的 mgu.

6.3　谓词演算中的归结原理

设 A 是任一闭公式，$S = \{C_1, \cdots, C_n\}$ 是 A 的子句集. 由命题 5.3.1 知，为证明

A 是矛盾式必须而且只需证明 S 不可满足. 归结原理就是证明 S 不可满足的一种有效方法. 不过在作归结之前先要把 S 整理好, 即, 假定 $C_1, \cdots, C_n$ 中不含相同的变元. 前面在进行 Skolem 变形时已经申明过这一点(参看注 5.3.1). 又, 在未对两个子句 C_i 与 C_j 进行归结之前, 往往需要分别把 C_i 与 C_j 自身先整理得简单一些. 这就是下面引入子句的因子的原因所在.

6.3.1 二元归结式与归结式

定义 6.3.1 设 C 是子句, σ 是 C 中不少于两个文字的 mgu, 则称 $C\sigma$ 为 C 的**因子**. 如果 $C\sigma$ 是单子句, 即, σ 是 C 中所有文字之集的 mgu, 则称 $C\sigma$ 为 C 的**单位因子**.

例 6.3.1 (i) 设 $C = P(x) \vee P(f(y)) \vee Q(x) \vee \neg R(y)$, 则 C 的前两个文字可合一, 相应的 mgu 为 $\sigma = \{f(y)/x\}$, 这时 $C\sigma = P(f(y)) \vee Q(f(y)) \vee \neg R(y)$ 是 C 的因子.

(ii) 设 $C = P(x) \vee P(f(y)) \vee P(f(b))$, 令 $\sigma = \{f(b)/x, b/y\}$, 则 $C\sigma = P(f(b))$ 是 C 的单位因子.

定义 6.3.2 设 C_1 与 C_2 是不含相同变元的两个子句(**父辈子句**), 分别含有文字 L_1 与 L_2, 且 L_1 与 $\neg L_2$ 有 mgu σ, 则称

$$(C_1\sigma - L_1\sigma) \vee (C_2\sigma - L_2\sigma)$$

为 C_1 与 C_2 的**二元归结式**, L_1 与 L_2 叫**被消去文字**, 这里 $C_i\sigma - L_i\sigma$ 指在 $C_i\sigma$ 中删去析取项 $L_i\sigma$ 所得之子句($i = 1, 2$).

例 6.3.2 (i) 设 $C_1 = P(x) \vee Q(x)$, $C_2 = \neg P(f(x)) \vee R(x)$, 则无法直接求 C_1 与 C_2 的二元归结式, 因为二者含有相同变元, 这时可将 C_2 换为 $C_2 = \neg P(f(y)) \vee R(y)$. 令 $L_1 = P(x)$, $L_2 = \neg P(f(y))$, 则 L_1 与 $\neg L_2$ 有 mgu $\sigma = \{f(y)/x\}$, 所以 C_1 与 C_2 的二元归结式为

$(C_1\sigma - L_1\sigma) \vee (C_2\sigma - L_2\sigma) = (P(f(y)) \vee Q(f(y)) - P(f(y))) \vee (\neg P(f(y)) \vee R(y) - \neg P(f(y))) = Q(f(y)) \vee R(y)$.

这时 $P(x)$ 与 $\neg P(f(y))$ 是被消去文字.

(ii) 设 C_1 与 C_2 同上, 把 C_1 改为 $C_1 = P(y) \vee Q(y)$, 则可求得 C_1 与 C_2 的二元归结式为 $Q(f(x)) \vee R(x)$.

(iii) 设 $C_1 = P(x) \vee Q(x)$, $C_2 = P(f(x)) \vee R(x)$, 则 C_1 与 C_2 没有二元归结式.

(iv) 设 $C_1 = P(x) \vee Q(x)$, $C_2 = \neg P(x) \vee R(x)$, 则 C_1 与 C_2 含有相同变元, 但无须改变 C_1 或 C_2 中的变元, 可直接得出 C_1 与 C_2 的二元归结式 $Q(x) \vee R(x)$.

定义 6.3.3 设 C_1 与 C_2 是二子句, 则由以下方法所得的子句都叫 C_1 与 C_2 的**归结式**, C_1 与 C_2 叫父辈子句.

(i) C_1 与 C_2 的二元归结式.

(ii) C_1 与 C_2 的因子的二元归结式.

(iii) C_1 的因子与 C_2 的二元归结式.

(iv) C_1 的因子与 C_2 的因子的二元归结式.

例 6.3.3 (i) 设 $C_1 = P(x) \vee P(f(y)) \vee P(f(b)) \vee \neg Q(x) \vee R(y)$, $C_2 = \neg P(f(u)) \vee Q(v)$,则 C_1 有一因子为 $P(f(b)) \vee \neg Q(f(b)) \vee R(b)$. 此因子与 C_2 的二元归结式为 $\neg Q(f(b)) \vee Q(v) \vee R(b)$. 这就是 C_1 与 C_2 的归结式.

(ii) 设 C_3 为(i) 中的归结式 $\neg Q(f(b)) \vee Q(v) \vee R(b)$, $C_4 = \neg R(x)$,则 C_3 与 C_4 的归结式就是它们的二元归结式,为 $\neg Q(f(b)) \vee Q(v)$.

(iii) 设 C_5 为(ii) 中的归结式 $\neg Q(f(b)) \vee Q(v)$, C_6 为 $Q(f(y))$,则 C_5 与 C_6 的归结式为 $Q(v)$.

(iv) 设 $C_7 = Q(v)$, $C_8 = \neg Q(a)$,则 C_7 与 C_8 的归结式为 $\square$.

6.3.2 归结证明

定义 6.1.3 也适用于谓词演算,下面的定义讲得更细致一些.

定义 6.3.4 设 $S = \{C_1, \cdots, C_n\}$ 是子句集. 称 S 中的子句为 S 的 0- 级归结推论. 设 S 的不超过 k- 级的归结推论已定义, C^* 是 S 的两个不超过 k- 级的归结推论(且其中至少有一个为 k- 级归结推论) 的归结式,则称 C^* 为 S 的 $(k+1)$- 级归结推论 $(k = 0, 1, \cdots)$. 从 S 到其 k- **级归结推论** C^* 的过程叫从 S 到 C^* 的**归结推理**. 从 S 到 $\square$ 的归结推理叫 S 的**归结证明**,简称为 S 的**证明**.

例 6.3.4 设 $S = \{C_1, C_2, C_4, C_6, C_8\}$,这里 $C_1, \cdots, C_8$ 如例 6.3.6 所示,则

(i) C_3 是 S 的 1- 级归结推论, C_5 与 C_7 分别是 S 的 2- 级与 3- 级归结推论.

(ii) $\square$ 是 S 的 4- 级归结推论,从 S 到 $\square$ 的归结推论是 S 的一个归结证明.

本例中 S 有一有限封闭语义树如图 6.3.1. 从而由 Herbrand 定理 I 知 S 不可满足. 图 6.3.1 中的结点 $N(C_4)$ 指使 S 中的子句 C_4 的基例 $\neg R(b)$ 不成立的失败结点,其余的失败结点也类似.

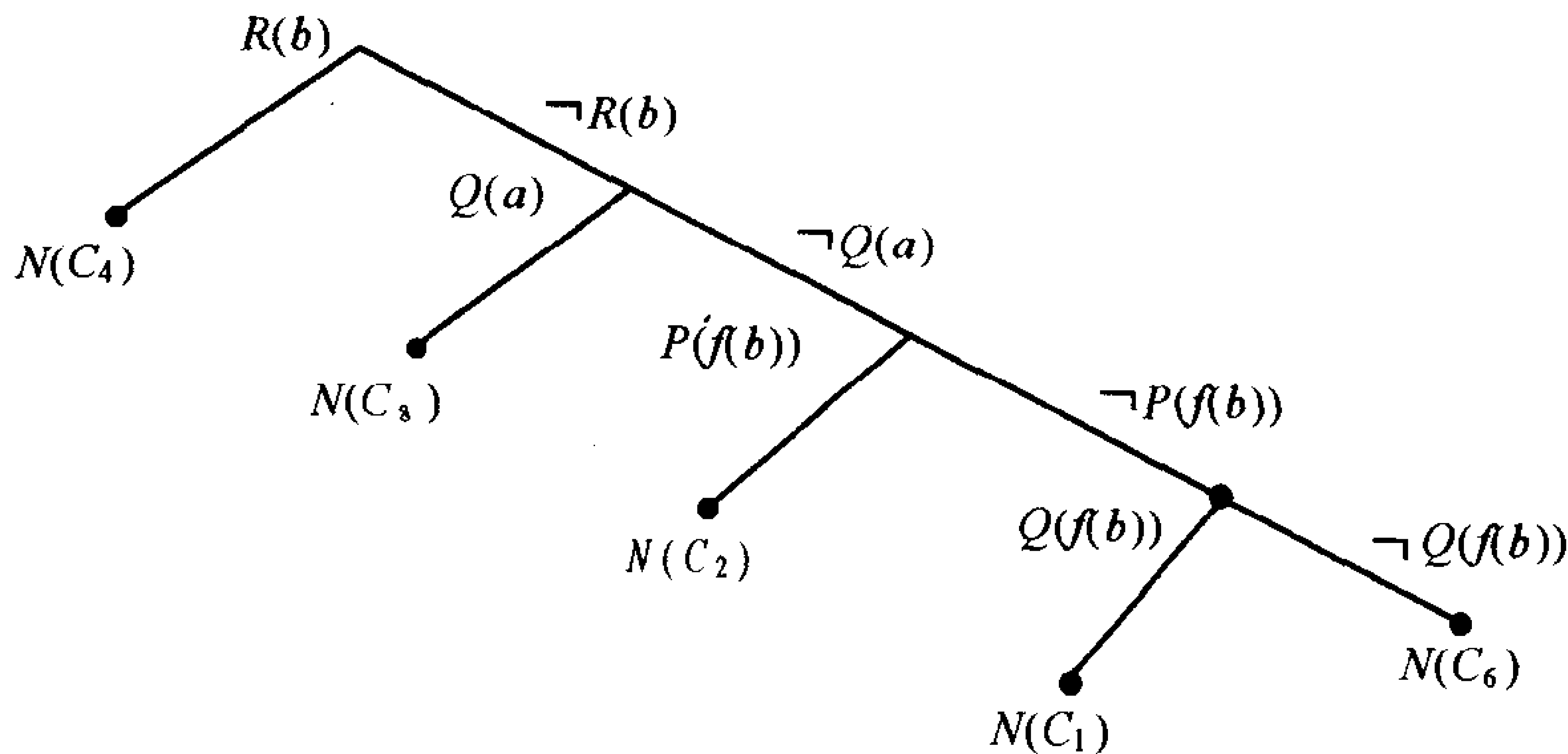


图 6.3.1

在后面要讲的归结原理的完备性表明：S 不可满足当且仅当 S 有一个归结证明. 我们先来看一些归结证明的例子.

例 6.3.5 (i) 设 $S=\{\neg M(x) \vee D(x), M(u), \neg D(u)\}$，试写出 S 的一个证明.

解 (1) $\neg M(x) \vee D(x)$ S

(2) $M(u)$ S

(3) $\neg D(u)$ S

(4) $D(u)$ (1),(2) 归结

(5) $\square$ (3),(4) 归结

(ii) 设 $S=\{\neg C(x) \vee W(x), \neg C(x) \vee R(x), C(a), Q(a), \neg Q(x) \vee \neg R(x)\}$，试写出 S 的一个证明.

解 (1) $\neg C(x) \vee W(x)$ S

(2) $\neg C(x) \vee R(x)$ S

(3) $C(a)$ S

(4) $Q(a)$ S

(5) $\neg Q(x) \vee \neg R(x)$ S

(6) $R(a)$ (2),(3) 归结

(7) $\neg R(a)$ (4),(5) 归结

(8) $\square$ (6),(7) 归结

(iii) 设 $S=\{P(a), \neg D(y) \vee L(a,y), \neg P(x) \vee \neg Q(y) \vee \neg L(x,y), D(b), Q(b)\}$，试写出 S 的一个证明.

解 (1) $P(a)$ S

(2) $\neg D(y) \vee L(a,y)$ S

(3) $\neg P(x) \vee \neg Q(y) \vee \neg L(x,y)$ S

(4) $D(b)$ S

(5) $Q(b)$ S

(6) $\neg Q(y) \vee \neg L(a,y)$ (1),(3) 归结

(7) $L(a,b)$ (2),(4) 归结

(8) $\neg Q(b)$ (6),(7) 归结

(9) $\square$ (5),(8) 归结

(iv) 设 $S=\{\neg A(x) \vee B(x) \vee C(f(x)), \neg A(x) \vee B(x) \vee Q(x,f(x)), A(a), P(a), \neg Q(a,y) \vee P(y), \neg P(x) \vee \neg B(x), \neg P(x) \vee \neg C(x)\}$，试写出 S 的一个证明.

解 (1) $\neg A(x) \vee B(x) \vee C(f(x))$ S

(2) $\neg A(x) \vee B(x) \vee Q(x,f(x))$ S

(3) $A(a)$ 　　S

(4) $P(a)$ 　　S

(5) $\neg Q(a,y) \vee P(y)$ 　　S

(6) $\neg P(x) \vee \neg B(x)$ 　　S

(7) $\neg P(x) \vee \neg C(x)$ 　　S

(8) $B(a) \vee C(f(a))$ 　　(1),(3) 归结

(9) $B(a) \vee Q(a,f(a))$ 　　(2),(3) 归结

(10) $\neg P(f(a)) \vee B(a)$ 　　(7),(8) 归结

(11) $\neg B(a)$ 　　(4),(6) 归结

(12) $C(f(a))$ 　　(8),(11) 归结

(13) $P(f(a)) \vee B(a)$ 　　(5),(9) 归结

(14) $B(a)$ 　　(10),(13) 归结

(15) $\square$ 　　(11),(14) 归结

例 6.3.6 (i) 设 A 为与第 3 章开始时的例相关的公式(u 是个体常元)

$$(\forall x)(M(x) \rightarrow D(x)) \wedge M(u) \rightarrow D(u). \tag{6.3.1}$$

为证明式(6.3.1) 是 $\boldsymbol{K}_{\mathscr{L}}$ 中的定理,可等价地证明下式为矛盾式:

$$(\forall x)(M(x) \rightarrow D(x)) \wedge M(u) \wedge \neg D(u). \tag{6.3.2}$$

易证明式(6.3.2) 逻辑等价于

$$(\forall x)((\neg M(x) \vee D(x)) \wedge M(u) \wedge \neg D(u)). \tag{6.3.3}$$

可见式(6.3.3) 的子句集正是例 6.3.5(i) 中的 S. 因为 S 有一个归结证明,所以后面要讲的归结原理的完备性建立之后便可得出式(6.3.2) 为矛盾式的结论.

(ii) 设 $F = (\forall x)(C(x) \rightarrow (W(x) \wedge R(x)))$,$G = (\exists y)(C(y) \wedge Q(y))$,$H = (\exists x)(Q(x) \wedge R(x))$,$A = F \wedge G \wedge \neg H$. 试证 A 的子句集 S 有一个证明.

解 令 $F_1 = (C(x) \rightarrow (W(x) \wedge R(x)))$,$G_1 = C(y) \wedge Q(y)$,$H_1 = \neg(Q(x) \wedge R(x))$,则 $A = (\forall x)F_1 \wedge (\exists y)G_1 \wedge (\forall x)H_1$. 不难证明(参看命题 5.2.3)

$$(\forall x)F_1 \wedge (\forall x)H_1 \sim (\forall x)(F_1 \wedge H_1). \tag{6.3.4}$$

$$(\forall x)(F_1 \wedge H_1) \wedge (\exists y)G_1 \sim (\exists y)(\forall x)(F_1 \wedge H_1 \wedge G_1). \tag{6.3.5}$$

所以

$$A \sim (\exists y)(\forall x)(F_1 \wedge H_1 \wedge G_1). \tag{6.3.6}$$

这时

$$F_1 \wedge H_1 \wedge G_1 = (\neg(C(x) \vee (W(x) \wedge R(x)))) \wedge (\neg Q(x) \vee \neg R(x)) \wedge (C(y) \wedge Q(y)).$$

将式(6.3.6) 右端作 Skolem 变形可得其子句集

$$S' = \{\neg C(x) \vee W(x), \neg C(x) \vee R(x), \neg Q(x) \vee \neg R(x), C(a), Q(a)\}.$$

这正是例 6.3.5(ii) 中的子句集. 所以 S' 有一个证明. 由下面要讲的归结原理的完备性定理知,式(6.3.6)右端是矛盾式,从而 A 是矛盾式,所以 A 的子句集 S 必有一个证明.

注 6.3.1 可能有子句 C_1 与 C_2 有归结式,但 C_1 的因子与 C_2 没有归结式的情况. 如,设 $C_1 = P(x) \vee P(a)$,$C_2 = \neg P(b)$,则 C_1 和 C_2 有归结式 $P(a)$,但 C_1 的因子 $P(a)$ 与 C_2 没有归结式. 这一情况对可否从子句集 S 经归结推理推出空子句 $\square$ 来并无影响.

6.4 归结原理的完备性定理

6.4.1 提升引理

为了证明归结原理的完备性定理,我们需要一个引理,它说如果两个子句的例有归结式,则这两个子句本身就有归结式,且以前一归结式为它的例,即下面的引理成立:

引理 6.4.1(提升引理) 设 C_1' 与 C_2' 分别是子句 C_1 与 C_2 的例,C_1 与 C_2 不含相同的变元,C' 是 C_1' 与 C_2' 的归结式,则 C_1 与 C_2 有一归结式 C 使 C' 是 C 的例.

为便于读者理解提升引理的证明思路,我们先看一个具体的例子,其演算过程恰与提升引理的证明形成对照.

例 6.4.1 设

$$C_1 = P(x) \vee \neg Q(y) \vee \neg Q(f(z)).$$
$$C_2 = R(u) \vee Q(v) \vee Q(f(w)) \vee Q(fg(t)) \vee N(t).$$
$$\theta = \{fgh(s)/y, gh(s)/z, fg(t)/v, g(t)/w\}.$$

则由 θ 可得出 C_1 与 C_2 的例 C_1' 与 C_2' 如下:

$$C_1' = C_1\theta = P(x) \vee \neg Q(fgh(s)),$$
$$C_2' = C_2\theta = R(u) \vee Q(fg(t)) \vee N(t).$$

注意 θ 分别使 C_1 与 C_2 中的 2 个文字与 3 个文字得到了合一. 取置换 $\gamma = \{h(s)/t\}$ 则 γ 是 $Q(fgh(s))$ 与 $Q(fg(t))$ 的 mgu,所以可得 C_1' 与 C_2' 的归结式 C' 如下:

$$\begin{aligned} C' &= (C_1'\gamma - \neg Q(fgh(s))\gamma) \vee (C_2'\gamma - Q(fg(t))\gamma) \\ &= P(x) \vee R(u) \vee N(h(s)). \end{aligned} \tag{6.4.1}$$

在 θ 的作用下,C_1 中的文字 $L_1^1 = \neg Q(y)$ 和 $L_1^2 = \neg Q(f(z))$ 被合一为 L_1',C_2 中的文字 $L_2^1 = Q(v)$,$L_2^2 = Q(f(w))$ 和 $L_2^3 = Q(fg(t))$ 被合一为 L_2',即

$$L_1^1\theta = L_1^2\theta = \neg Q(fgh(s)) = L_1',$$
$$L_2^1\theta = L_2^2\theta = L_2^3\theta = Q(fg(t)) = L_2'.$$

设 λ_1 是 $\{L_1^1, L_1^2\}$ 的 mgu,λ_2 是 $\{L_2^1, L_2^2, L_2^3\}$ 的 mgu,即

$$\lambda_1 = \{f(z)/y\}, \quad \lambda_2 = \{fg(t)/v, g(t)/w\}.$$

令 $\lambda = \lambda_1 \cup \lambda_2$，即

$$\lambda = \{f(z)/y, fg(t)/v, g(t)/w\}.$$

这时有置换 $\mu = \{gh(s)/z\}$ 使 $\theta = \lambda \circ \mu$，且

$$L_1^1\lambda = L_1^2\lambda = \neg Q(f(z)), \quad L_2^1\lambda = L_2^2\lambda = L_2^3\lambda = Q(fg(t)).$$

分别以 L_1 与 L_2 记以上二式. 因为 $L_1'\gamma = \neg L_2'\gamma$，即

$$L_1^1\theta\gamma = L_1^2\theta\gamma = \neg L_2^1\theta\gamma = \neg L_2^2\theta\gamma = \neg L_2^3\theta\gamma,$$

$$\theta \circ \gamma = \{fhg(s)/y, gh(s)/z, fg(t)/v, g(t)/w, h(s)/t\}.$$

令 $W = \{L_1^1, L_1^2, \neg L_2^1, \neg L_2^2, \neg L_2^3\}$，则 $\theta\gamma$ 是 W 的合一置换. 由 $\theta = \lambda\mu$ 知 $\lambda\mu\gamma$ 也是 W 的合一置换. 由此得 $L_1\mu\gamma = \neg L_2\mu\gamma$. 以 σ 记 $\{L_1, \neg L_2\}$ 的 mgu，则 $\sigma = \{g(t)/z\}$，且有置换 δ 使

$$\mu\gamma = \sigma\delta \quad 且 \quad L_1\sigma = \neg L_2\sigma.$$

这时 $\lambda\sigma$ 是 W 的合一置换，$\lambda\sigma = \{fg(t)/y, fg(t)/v, g(t)/w, g(t)/z\}$.

设 η 是 W 的任一合一化子，则 η 也分别是 $\{L_1^1, L_1^2\}$ 与 $\{L_2^1, L_2^2, L_2^3\}$ 的合一化子，所以由 λ_1 与 λ_2 分别为上述二集的 mgu 以及 C_1, C_2 不含相同变元知，存在置换 ξ 使 $\eta = \lambda\xi$. 这时

$$\{L_1^1, L_1^2\}\lambda\xi = \{\neg L_2^1, \neg L_2^2, \neg L_2^3\}\lambda\xi,$$

即

$$L_1\xi = \neg L_2\xi.$$

所以由 σ 是 $\{L_1, \neg L_2\}$ 的 mgu 知有置换 ζ 使 $\xi = \sigma\zeta$，从而

$$\eta = \lambda\xi = \lambda(\sigma\zeta) = (\lambda\sigma)\zeta.$$

这就证明了 $\lambda\sigma$ 是 W 的 mgu. 所以令

$$\begin{aligned} C &= (C_1\lambda\sigma - L_1\sigma) \vee (C_2\lambda\sigma - L_2\sigma) \\ &= (C_1\lambda\sigma - \{L_1^1, L_1^2\}\lambda\sigma) \vee (C_2\lambda\sigma - \{L_2^1, L_2^2, L_2^3\}\lambda\sigma) \\ &= P(x) \vee R(u) \vee N(t). \end{aligned} \tag{6.4.2}$$

则 C 是 C_1 与 C_2 的归结式. 将式(6.4.1)与式(6.4.2)对比可见，若令 $\delta = \{h(s)/t\}$，则 $C' = C\delta$. 可见 C' 是 C 的例.

提升引理的证明　我们将证明比提升引理的内容更强的结果. 如例 6.4.1 所示，如果在得到子句 C_1 与 C_2 的例 C_1' 与 C_2' 时分别使 C_1 与 C_2 中的 r_1 个与 r_2 个文字得到了合一，则在作 C_1 与 C_2 的归结式 C 时可分别使 C_1 与 C_2 消去 r_1 与 r_2 个文字. 同时也正因如此归结式 C 才可使 C' 为它的例.

设

$$C' = (C_1'\gamma - L_1'\gamma) \vee (C_2'\gamma - L_2'\gamma),$$

这里 L_1' 与 L_2' 分别是 C_1' 与 C_2' 中经置换 γ 而消去的文字，γ 是 $\{L_1', \neg L_2'\}$ 的 mgu. 因为 C_1 与 C_2 不含相同变元，C_1' 与 C_2' 分别是它们的例，所以有置换 θ 使 $C_1' = C_1\theta, C_2' = C_2\theta$. 在 θ 的作用下，C_1 中可能有 r_1 个文字 $L_1^1, \cdots, L_1^{r_1}$ 被 θ 合一为 L_1'，

C_2 中可能有 r_2 个文字 $L_2^1,\cdots,L_2^{r_2}$ 被 θ 合一为 L_2'，即

$$L_1^1\theta=\cdots=L_1^{r_1}\theta=L_1',\quad L_2^1\theta=\cdots=L_2^{r_2}\theta=L_2'.$$

分别设 λ_1 与 λ_2 为 $\{L_1^1,\cdots,L_1^{r_1}\}$ 与 $\{L_2^1,\cdots,L_2^{r_2}\}$ 的 mgu(当 $r_1=1$ 或 $r_2=1$ 时令 $\lambda_1=\varepsilon$ 或 $\lambda_2=\varepsilon$). 令 $\lambda=\lambda_1\cup\lambda_2$，则因 C_1 与 C_2 不含相同变元，所以有置换 μ 使 $\theta=\lambda\circ\mu$. 设

$$L_1^1\lambda=\cdots=L_1^{r_1}\lambda=L_1,\quad L_2^1\lambda=\cdots=L_2^{r_2}\lambda=L_2. \tag{6.4.3}$$

由 $L_1'\gamma=\neg L_2'\gamma$ 得

$$L_1^1\theta\gamma=\cdots=L_1^{r_1}\theta\gamma=\neg L_2^1\theta\gamma=\cdots=\neg L_2^{r_2}\theta\gamma.$$

$$L_1^1\lambda\mu\gamma=\cdots=L_1^{r_1}\lambda\mu\gamma=\neg L_2^1\lambda\mu\gamma=\cdots=\neg L_2^{r_2}\lambda\mu\gamma.$$

所以由式(6.4.3)得 $L_1\mu\gamma=\neg L_2\mu\gamma$，即 $\{L_1,\neg L_2\}$ 可合一. 设 σ 是其 mgu，则有置换 δ 使 $\mu\gamma=\sigma\delta$，且

$$L_1\sigma=\neg L_2\sigma. \tag{6.4.4}$$

由式(6.4.3)与式(6.4.4)知 $\lambda\sigma$ 是 $W=\{L_1^1,\cdots,L_1^{r_1},\neg L_2^1,\cdots,\neg L_2^{r_2}\}$ 的合一化子. 设 η 是 W 的任一合一化子，则 η 分别将 $W_1=\{L_1^1,\cdots,L_1^{r_1}\}$ 与 $W_2=\{L_2^1,\cdots,L_2^{r_2}\}$ 合一. 由 λ_1 与 λ_2 分别是 W_1 与 W_2 的 mgu 知存在置换 ξ 使 $\eta=\lambda\xi$. 这时

$$\{L_1^1,\cdots,L_1^{r_1}\}\lambda\xi=\{\neg L_2^1,\cdots,\neg L_2^{r_2}\}\lambda\xi.$$

由式(6.4.3)得 $L_1\xi=\neg L_2\xi$. 但 σ 是 $\{L_1,\neg L_2\}$ 的 mgu，所以有置换 ζ 使 $\xi=\sigma\zeta$. 由此得

$$\eta=\lambda\xi=\lambda(\sigma\zeta)=(\lambda\sigma)\zeta.$$

这就证明了 $\lambda\sigma$ 是 W 的 mgu，所以令

$$\begin{aligned}C&=(C_1\lambda\sigma-L_1\sigma)\vee(C_2\lambda\sigma-L_2\sigma)\\&=(C_1\lambda\sigma-\{L_1^1,\cdots,L_1^{r_1}\}\lambda\sigma)\vee(C_2\lambda\sigma-\{L_2^1,\cdots,L_2^{r_2}\}\lambda\sigma),\end{aligned} \tag{6.4.5}$$

则 C 是 C_1 与 C_2 的归结式，且经过 $\lambda\sigma$ 的作用，C_1 与 C_2 中分别有 r_1 个与 r_2 个文字被消去.

最后，由 $\theta\gamma=(\lambda\mu)\gamma=\lambda(\mu\gamma)=\lambda(\sigma\delta)=(\lambda\sigma)\delta$ 和式(6.4.5)得

$$\begin{aligned}C'&=(C_1'\gamma-L_1'\gamma)\vee(C_2'\gamma-L_2'\gamma)\\&=(C_1\theta\gamma-\{L_1^1,\cdots,L_1^{r_1}\}\theta\gamma)\vee(C_2\theta\gamma-\{L_2^1,\cdots,L_2^{r_2}\}\theta\gamma)\\&=(C_1(\lambda\sigma)\delta-\{L_1^1,\cdots,L_1^{r_1}\}(\lambda\sigma)\delta)\vee(C_2(\lambda\sigma)\delta-\{L_2^1,\cdots,L_2^{r_2}\}(\lambda\sigma)\delta).\end{aligned} \tag{6.4.6}$$

又，由于 $\lambda\sigma$ 与 $(\lambda\sigma)\delta$ 均分别消去 C_1 与 C_2 中的 r_1 个与 r_2 个文字，下面 $C\delta$ 中的 δ 可移入括号内：

$$\begin{aligned}C\delta&=((C_1\lambda\sigma-\{L_1^1,\cdots,L_1^{r_1}\}\lambda\sigma)\vee(C_2\lambda\sigma-\{L_2^1,\cdots,L_2^{r_2}\}\lambda\sigma))\delta\\&=(C_1(\lambda\sigma)\delta-\{L_1^1,\cdots,L_1^{r_1}\}(\lambda\sigma)\delta)\vee(C_2(\lambda\sigma)\delta-\{L_2^1,\cdots L_2^{r_2}\}(\lambda\sigma)\delta)\\&=C',\end{aligned}$$

所以 C' 是 C 的例.

注 6.4.1　以上在用 $\lambda\sigma$ 对 C_1 与 C_2 作归结演算时分别从 C_1 与 C_2 中消去了 r_1 个与 r_2 个文字. 这一点是必要的. 事实上，从表面上看在作归结式 C' 时只从 $C_1{}'$ 与 $C_2{}'$ 中各消去了一个文字 $L_1{}'$ 与 $L_2{}'$，但 $L_1{}'$ 与 $L_2{}'$ 分别是 θ 将 C_1 中的 $\{L_1^1,\cdots,L_1^{r_1}\}$ 与 C_2 中的 $\{L_2^1,\cdots,L_2^{r_2}\}$ 合一而得到的. 所以为使 C_1 与 C_2 的归结式 C 以 C' 为例，在用 $\lambda\sigma$ 制作 C 时必须分别消去 C_1 中的 $\{L_1^1,\cdots,L_1^{r_1}\}$ 与 C_2 中的 $\{L_2^1,\cdots,L_2^{r_2}\}$. 当然，这时式(6.4.5)超出了归结式的定义 6.3.2 和定义 6.3.3 的范围. 但容易把式(6.4.5)改写为与上述定义相一致的形式：

$$C = (C_1\lambda\sigma - L_1^1\lambda\sigma) \vee (C_2\lambda\sigma - L_2^1\lambda\sigma). \tag{6.4.7}$$

因为 $\lambda\sigma$ 还有将 $\{L_1^1,\cdots,L_1^{r_1}\}$ 和 $\{L_2^1,\cdots,L_2^{r_2}\}$ 分别合一的作用，所以由

$$L_1^1\lambda\sigma = \cdots = L_1^{r_1}\lambda\sigma \quad 与 \quad L_2^1\lambda\sigma = \cdots = L_2^{r_2}\lambda\sigma$$

知式(6.4.7)与式(6.4.5)相同. 值得注意的是，这时 $\lambda\sigma$ 是 W 的 mgu，一般它不必是 $\{L_1^1,\neg L_2^1\}$ 的 mgu，所以我们宁可写形式复杂但意义明确的式(6.4.5)而不写式(6.4.7)，虽然它稍稍超出了归结式的原始定义. 最后还应指出，从形式上看，由式(6.4.6)似乎也可得出 C' 本身就是 C_1 与 C_2 的归结式的结论来，但这是不对的，因为 $\theta\gamma$ 不是 W 的 mgu.

6.4.2　归结原理的完备性

现在证明归结原理的完备性定理.

命题 6.4.1(归结原理的完备性定理)　子句集 S 不可满足当且仅当 S 有一个归结证明.

证明　首先注意，若 $\mathscr{L}$ 的解释 I 满足两个子句 C_1 与 C_2，则可像证明命题 6.1.2 那样证明 I 也满足 C_1 与 C_2 的二元归结式. 其次，设 I 满足子句 C，则 I 也满足 C 的例 $C\sigma$. 事实上，设 $\sigma = \{t_1/x_1,\cdots,t_k/x_k\}$，$v$ 是 $\mathscr{L}$ 在 I 中的任一赋值. 作赋值 u 使

$$u(x_i) = \begin{cases} v(t_i), & i \in \{1,\cdots,k\}, \\ v(x_i), & i \notin \{1,\cdots,k\}. \end{cases}$$

则由 u 满足 C 便推得 v 满足 $C\sigma$. 由 v 的任意性得 $I \models C\sigma$. 综上所述，由定义 6.3.3 知若 I 是 C_1 与 C_2 的模型，则 I 也是 C_1 与 C_2 的归结式的模型.

设 $S = \{C_1,\cdots,C_n\}$ 可满足，I 是 S 的模型，则由以上所证知 I 也是可由 S 得出的各个归结式的模型. 可见从 S 出发经归结推理得不出空子句□来. 这就证明了如果 S 有归结证明，则 S 必不可满足.

反过来，设 S 不可满足，则由 Herbrand 定理 I 知 S 有一个有限的封闭的二叉语义树 T. T 中必有一个结点 N，N 下方两个与 N 相邻的结点 N_1 与 N_2 都是失败结点，因为否则 T 中将含有一个无限长的分支，与 T 的有限性相矛盾. 设 N 是这样的结点且 N_1 与 N_2 是与 N 相邻的两个失败结点. 设从 T 的根起向下到 N_1 与 N_2 的边上的文字分别依次为

$$m_1, m_2, \cdots, m_n, m_{n+1}$$

与

$$m_1, m_2, \cdots, m_n, \neg m_{n+1}.$$

这里 m_i 是 S 中的基原子或其否定($i = 1, \cdots, n+1$). 既然 N_1 与 N_2 分别是失败结点，且 N 不是失败节点，所以 S 有两个子句 C_1 与 C_2，其基例 C_1' 与 C_2' 分别关于 N_1 与 N_2 为假，但关于 N 都不为假，所以 C_1' 与 C_2' 分别具有如下的形式：

$$C_1' = \neg m_{i_1} \vee \cdots \vee \neg m_{i_k} \vee \neg m_{n+1}, \quad 1 \leqslant i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_k \leqslant n, \tag{6.4.8}$$

$$C_2' = \neg m_{j_1} \vee \cdots \vee \neg m_{j_l} \vee m_{n+1}, \quad 1 \leqslant j_1 \leqslant \cdots \leqslant j_l \leqslant n. \tag{6.4.9}$$

设 $L_1' = \neg m_{n+1}, L_2' = m_{n+1}$，则由式(6.4.8)与式(6.4.9)知 C_1' 与 C_2' 有一归结式

$$C' = (C_1' - L_1') \vee (C_2' - L_2') = (\bigvee_{t=1}^{k} \neg m_{i_t}) \vee (\bigvee_{r=1}^{l} \neg m_{j_r}). \tag{6.4.10}$$

因为 C_1' 与 C_2' 分别是 C_1 与 C_2 的例，所以由提升引理知 C_1 与 C_2 有归结式 C，且 C' 是 C 的基例. 把 C 添加到 S 中去，则 $S \cup \{C\}$ 有一比 T 真小的有限封闭语义树 T'. 事实上，由式(6.4.10)知若令 $e = \max\{i_k, j_l\}$，则由 T 的根出发经边 $m_1, m_2, \cdots, m_e (e \leqslant n)$ 所到的节点 N^* 已经使 C' 为假，从 T 中删去 N^* 以下的部分即得 T'，T' 至少比 T 少了两个节点 N_1 与 N_2，所以比 T 真小. 且 T' 是 $S \cup \{C\}$ 的封闭语义树. 以 T' 作为 T 再作如上处理，可由 $S \cup \{C\}$ 得出一个归结式 $\bar{C}$，使得 $S \cup \{C, \bar{C}\}$ 有节点比 T' 更少的封闭语义树 T''. 以此类推最终可得一仅含三个节点的语义树 T_0，它除根而外有两个失败结点. 设相应的边上的文字为 δ 与 $\neg\delta$，这里 δ 与 $\neg\delta$ 是 S 中子句的或是由 S 经归结推理所得的归结式的基例. 可见由 S 出发可经归结推理得出相反的文字对来，再经一次归结即得空子句 □. 所以 S 有一个归结证明.

6.5 求子句集 S 的简化方法

在第5章开始时说过，为证明从若干个前提 $A_1, \cdots, A_n$ 可推得结论 B，可证明 $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \wedge \neg B$ 为矛盾式. 把这个公式记为 A，在第5章中已证明 A 为矛盾式等价于 A 的子句集 S 不可满足，而在求 S 前先需要把 A 化为前束范式，然后再使用 Skolem 变形求出一个形式为合取范式的母式来才可得到 S. 如果分别对 $A_1, \cdots, A_n$ 以及 $\neg B$ 进行 Skolem 变形，那将比对 A 进行 Skolem 变形要简单得多. 我们问：A 的子句集 S 是否可通过分别对 A 的各合取项进行 Skolem 变形而得到？答案是肯定的. 本节就讨论这一问题.

首先看一个例，这个例表明，一般说来 $A \wedge B$ 的子句集不同于 A 的子句集与 B 的子句集之并.

例 6.5.1 设 $A = (\exists x) A_1^1(x), B = (\forall y) \neg A_1^1(y)$，则由 Skolem 变形知 A 与 B 的子句集分别为 $A_1^1(c)$ 和 $\neg A_1^1(y)$，它们的并为 $S' = \{A_1^1(c), \neg A_1^1(y)\}$. S'

不可满足. 事实上，设 I 为 $\mathscr{L}$的任一解释. 取 $\mathscr{L}$在 I 中的赋值 v 使 $v(y)=v(c)=\bar{c}\in D_I$，则因$\overline{A_1^1}(\bar{c})\wedge\neg\overline{A_1^1}(\bar{c})$ 不成立，所以 I 不满足 S'，从而 S' 没有模型. 另一方面，由

$$\begin{aligned} A\wedge B &= \neg((\exists x)A_1^1(x)\rightarrow\neg(\forall y)\neg A_1^1(y)) \\ &= \neg((\exists x)A_1^1(x)\rightarrow(\exists y)A_1^1(y)) \\ &\sim \neg(\exists y)(\forall x)(A_1^1(x)\rightarrow A_1^1(y)) \\ &\sim (\forall y)(\exists x)\neg(A_1^1(x)\rightarrow A_1^1(y)) \\ &= (\forall y)(\exists x)(A_1^1(x)\wedge\neg A_1^1(y)) \end{aligned}$$

和 Skolem 变形知 $A\wedge B$ 的子句集 $S=\{A_1^1(f(y)),\neg A_1^1(y)\}$. S 也是不可满足的，因为它有如图 6.5.1 的有限封闭语义树. 即，S 虽与 S' 不同，但二者同为不可满足的.

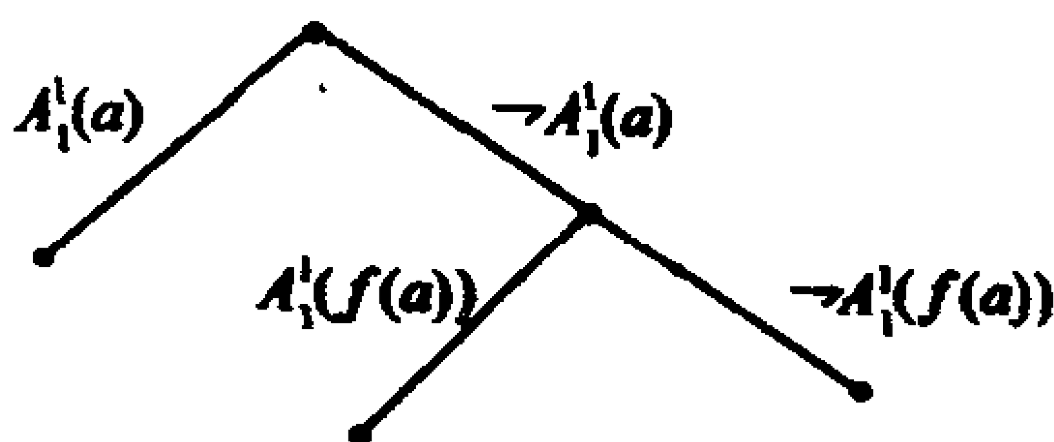


图 6.5.1

这一情况并非偶然. 事实上，我们有

命题 6.5.1　设

$$A=(Q_1x_1)\cdots(Q_nx_n)A_1(x_1,\cdots,x_n),$$
$$B=(R_1y_1)\cdots(R_my_m)B_1(y_1,\cdots,y_m),$$

这里 $x_1,\cdots,x_n$ 和 $y_1,\cdots,y_m$ 分别是 A 与 B 中的全部变元且 $x_i\neq y_j(i=1,\cdots,n;j=1,\cdots,m)$，$A_1$ 与 B_1 都不含量词且为合取范式. 设 S 是 $A\wedge B$ 的子句集，S_1 与 S_2 分别是 A 与 B 的子句集，则 S 不可满足当且仅当 $S_1\cup S_2$ 不可满足.

证明　以 $m=n=2$ 为例进行证明. 因为 A 与 B 不含相同变元，易证

$$A\wedge B\sim(Q_1x_1)(Q_2x_2)(R_1y_1)(R_2y_2)(A_1(x_1,x_2)\wedge B_1(y_1,y_2)). \tag{6.5.1}$$

$$A\wedge B\sim(R_1y_1)(R_2y_2)(Q_1x_1)(Q_2x_2)(A_1(x_1,x_2)\wedge B_1(y_1,y_2)). \tag{6.5.2}$$

设 A 与 B 的 Skolem 标准形的母式分别为 C 与 D，以下只需证 $A\wedge B$ 的 Skolem 标准形的母式 E 与 $C\wedge D$ 相同或具有与 $C\wedge D$ 相同的可满足性或不可满足性.

事实上，若 $Q_1=Q_2=\exists$，则由式(6.5.1) 知 $A\wedge B$ 的 Skolem 标准形与

$$(R_1y_1)(R_2y_2)(A_1(a,b)\wedge B_1(y_1,y_2)),$$

即

$$A_1(a,b)\wedge(R_1y_1)(R_2y_2)B_1(y_1,y_2)$$

的 Skolem 标准形相同，其母式 E 显然为 $A_1(a,b) \wedge D$，这里 D 是 $(R_1 y_1)(R_2 y_2)B_1(y_1,y_2)$(即 B) 的母式. 所以 $E = C \wedge D$. 若 $Q_1 = Q_2 = \forall$，则由式(6.5.2) 易证 $E = C \wedge D$. 类似可证若 $R_1 = R_2 = \exists$ 或 $R_1 = R_2 = \forall$，仍有 $E = C \wedge D$. 所以以下只需考虑 Q_1 与 Q_2 为不同量词，R_1 与 R_2 也为不同量词的情形. 由式(6.5.1) 知 $A \wedge B$ 的前束范式共有 4 种可能，即，

$$(\exists x_1)(\forall x_2)(\exists y_1)(\forall y_2)(A_1(x_1,x_2) \wedge B_1(y_1,y_2)),$$
$$(\exists x_1)(\forall x_2)(\forall y_1)(\exists y_2)(A_1(x_1,x_2) \wedge B_1(y_1,y_2)),$$
$$(\forall x_1)(\exists x_2)(\exists y_1)(\forall y_2)(A_1(x_1,x_2) \wedge B_1(y_1,y_2)),$$
$$(\forall x_1)(\exists x_2)(\forall y_1)(\exists y_2)(A_1(x_1,x_2) \wedge B_1(y_1,y_2)).$$

相应地，$A \wedge B$ 的 Skolem 标准形的母式分别为

$$A_1(a,x_2) \wedge B_1(g(x_2),y_2), \tag{6.5.3}$$
$$A_1(a,x_2) \wedge B_1(y_1,h(x_2,y_1)), \tag{6.5.4}$$
$$A_1(x_1,f(x_1)) \wedge B_1(g(x_1),y_2), \tag{6.5.5}$$
$$A_1(x_1,f(x_1)) \wedge B_1(y_1,h(x_1,y_1)). \tag{6.5.6}$$

而 $C \wedge D$ 分别为

$$A_1(a,x_2) \wedge B_1(b,y_2), \tag{6.5.3$'$}$$
$$A_1(a,x_2) \wedge B_1(y_1,g(y_1)), \tag{6.5.4$'$}$$
$$A_1(x_1,f(x_1)) \wedge B_1(b,y_2), \tag{6.5.5$'$}$$
$$A_1(x_1,f(x_1)) \wedge B_1(y_1,g(y_1)). \tag{6.5.6$'$}$$

不难证明，式(6.5.n) 可满足当且仅当式(6.5.n)$'$ 可满足($n = 3,4,5,6$)，所以 $A \wedge B$ 的 Skolem 标准形的母式 E 和 A 与 B 的 Skolem 标准形的母式 C 与 D 的合取有相同的可满足性或不可满足性.

对于一般的 m 和 n 以及当 A_1 与 B_1 不限于是文字时可以证明命题 6.5.1 仍成立. 但在分别就 A_1 与 B_1 进行 Skolem 变形时应注意不添加相同的个体常元或函数符号. 这一命题可在保证相同的不可满足性或可满足性的意义下使计算一个公式的子句集的过程大大简化.

例 6.5.2 重新考虑例 6.3.6(ii)，这时容易分别算出 F，G 和 $\neg H$ 的子句集如下：

$$S_1 = \{\neg C(x) \vee W(x), \neg C(x) \vee R(x)\},$$
$$S_2 = \{C(a), Q(a)\},$$
$$S_3 = \{\neg Q(x) \vee \neg R(x)\}.$$

$S_1 \cup S_2 \cup S_3$ 正是例 6.3.6(ii) 中的 S'.

以上 $\neg H$ 虽然含有与 F 中相同的变元，但仍可使用命题 6.5.1. 事实上，如果把 $\neg H$ 中的变元改为 z，则得 $S_3' = \{\neg Q(z) \vee \neg R(z)\}$. 而 $S_1 \cup S_2 \cup S_3$ 与 $S_1 \cup S_2 \cup S_3'$ 有相同的不可满足性.

下面看两个有实际意义的例子.

例 6.5.3　假设有一些病人喜欢所有的真正医生,并且没有病人喜欢庸医,试由此推出没有真正的医生是庸医.

证明　分别用 $P(x)$,$D(x)$ 和 $Q(x)$ 表示 x 是一个病人,一位医生和一个庸医.用 $L(x,y)$ 表示 x 喜欢 y.则已知条件是

$$A:(\exists x)(P(x) \wedge (\forall y)(D(y) \rightarrow L(x,y))).$$

$$B:(\forall x)(P(x) \rightarrow (\forall y)(Q(y) \rightarrow \neg L(x,y))).$$

要推证的结论是

$$C:(\forall x)(D(x) \rightarrow \neg Q(x)).$$

为此可证明 $A \wedge B \wedge \neg C$ 是矛盾式,或其子句集 S 不可满足.由命题 6.5.1,可分别求出 A,B 和 $\neg C$ 的子句集 S_1,S_2 和 S_3 来,令 $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ 即可.

A 可化为前束范式 $(\exists x)(\forall y)(P(x) \wedge (\neg D(y) \vee L(x,y)))$. 所以 A 的 Skolem 标准形为 $(\forall y)(P(a) \wedge (\neg D(y) \vee L(a,y)))$. 由此得

$$S_1 = \{P(a), \neg D(y) \vee L(a,y)\}.$$

B 可化为前束范式 $(\forall x)(\forall y)(\neg P(x) \vee \neg Q(y) \vee \neg L(x,y))$. 这也是 B 的 Skolem 标准形,所以

$$S_2 = \{\neg p(x) \vee \neg Q(y) \vee \neg L(x,y)\}.$$

最后,$\neg C$ 可化为前束范式 $(\exists x)(D(x) \wedge Q(x))$,其 Skolem 标准形为 $D(b) \wedge Q(b)$. 所以

$$S_3 = \{D(b), Q(b)\}.$$

由此得

$$\begin{aligned} S &= S_1 \cup S_2 \cup S_3 \\ &= \{P(a), \neg D(y) \vee L(a,y), \neg P(x) \vee \neg Q(y) \vee \neg L(x,y), \\ &\quad D(b), Q(b)\}. \end{aligned}$$

在本例中应注意不要把 S_3 写为 $\{D(a), Q(a)\}$,因为 a 已经在 S_1 中的 $P(a)$ 中出现过了.以上的 S 就是例 6.3.5(iii) 中的 S. 在那里已看到 S 有一个归结证明,所以本例中的结论成立.

例 6.5.4　假设:

(i) 报考某校数学系研究生且达到分数线的非保送生都要经过某些老师的口试.

(ii) 有些达到分数线的考生要写情况汇报并且口试这些考生的人要写情况汇报.

(iii) 凡写情况汇报的人都不是保送生.

试证有老师要写情况汇报.

证明　分别用 $A(x)$,$B(x)$,$C(x)$ 和 $P(x)$ 表示 x 是达到分数线的考生,x 是保

送生，x 是老师和 x 要写情况汇报，并用 $Q(x,y)$ 表示由 y 对 x 进行口试. 这时条件 (i) ~ (iii) 可分别写为

$$F_1:(\forall x)(A(x) \land \neg B(x) \to (\exists y)(Q(x,y) \land C(y))).$$

$$F_2:(\exists x)(P(x) \land A(x) \land (\forall y)(Q(x,y) \to P(y))).$$

$$F_3:(\forall x)(P(x) \to \neg B(x)).$$

要证明的结论是

$$F_4:(\exists x)(P(x) \land C(x)).$$

为此可证明 $F_1 \land F_2 \land F_3 \land \neg F_4$ 为矛盾式，或其子句集 S 不可满足. 如前所述，可分别求出 F_1,F_2,F_3 和 $\neg F_4$ 的子句集 S_1,S_2,S_3 和 S_4，令 $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$ 即可.

F_1 可化为前束范式 $(\forall x)(\exists y)(A(x) \land \neg B(x) \to (Q(x,y) \land C(y)))$. 由此可求得 F_1 的 Skolem 标准形为

$$(\forall x)((\neg A(x) \lor B(x) \lor Q(x,f(x))) \land (\neg A(x) \lor B(x) \lor C(f(x)))).$$

所以 F_1 的子句集为

$$S_1 = \{\neg A(x) \lor B(x) \lor Q(x,f(x)),\ \neg A(x) \lor B(x) \lor C(f(x))\}.$$

F_2 可化为前束范式 $(\exists x)(\forall y)(P(x) \land A(x) \land (\neg Q(x,y) \lor P(y)))$，其 Skolem 标准形为 $(\forall y)(P(a) \land A(a) \land (\neg Q(a,y) \lor P(y)))$. 所以 F_2 的子句集为

$$S_2 = \{P(a),A(a),\neg Q(a,y) \lor P(y)\}.$$

又，容易分别求得 F_3 的子句集 S_3 和 $\neg F_4$ 的子句集 S_4 如下：

$$S_3 = \{\neg P(x) \lor \neg B(x)\},\quad S_4 = \{\neg P(x) \lor \neg C(x)\}.$$

这时 $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$ 正是例 6.3.5(iv) 中的子句集，那里已证 S 有一个证明. 所以本例中的结论成立.

习　题　6.5

1. 试证以下的 S 不可满足：

(i) $S = \{A \lor B \lor C, \neg A \lor C, \neg B, \neg C\}$.

(ii) $S = \{P \lor Q, \neg Q \lor R, \neg P \lor Q, \neg R\}$.

2. 对于以下的置换 θ 与表达式 E，求 $E\theta$：

(i) $E = A(f(x),z), \theta = \{a/x, b/y, g(x,y)/z\}$.

(ii) $E = A(x,y,z), \theta = \{f(y)/x, b/y, g(y)/z\}$.

3. 求 θ 与 μ 的复合，设：

(i) $\theta = \{a/x, f(z)/y, y/z\}, \mu = \{b/x, z/y, g(x)/z\}$.

(ii) $\theta = \{a/x, f(v)/y, u/z\}, \mu = \{z/u, g(u)/v\}$.

4. 判断以下哪些表达式之集 W 是可合一的，并在可合一的情况下找出相应的 mgu 以及一个不是 mgu 的合一化子来.

(i) $W = \{A(a), A(x), A(f(x))\}$.

(ii) $W = \{P(a,x), P(y,x)\}$.

(iii) $W = \{P(a,x,f(x)), P(y,z,z)\}$.

(iv) $W = \{P(x,y,z), P(u,f(u,u),u)\}$.

5. 求 C 与 D 的归结式，设

(i) $C = \neg A(x) \vee B(x,c), D = A(a) \vee B(b,y)$.

(ii) $C = \neg P(x) \vee Q(x,y), D = \neg Q(a,f(a))$.

(iii) $C = \neg A(x,y,z) \vee B(x,y,z), D = A(s,s,s)$.

(iv) $C = \neg A(x,y,u) \vee \neg A(y,z,v) \vee \neg A(x,v,w) \vee A(u,z,w)$,

$D = A(f(x,z),x,y)$ （**提示** 先求出 C 的因子 $C\sigma$ 来）.

6. 试证 $\vdash A \to B$，这里

$A = (\forall x)((\exists y)(Q(x,y) \wedge B(y)) \to (\exists y)(C(y) \wedge E(x,y)))$.

$B = \neg(\exists x)C(x) \to (\forall x)(\forall y)(Q(x,y) \to \neg B(y))$.

7. 求 A 的子句集 S_1，B 的子句集 S_2，但在进行Skolem变形时不添加相同的变元. 再求出 $A \wedge B$ 的子句集 S，并比较 S 与 $S_1 \cup S_2$ 在可满足性上的关系.

(i) $A = (\exists x_1)(\forall x_2)A_1^2(x_1,x_2), B = (\exists y_1)(\forall y_2)\neg A_1^2(y_1,y_2)$.

(ii) $A = (\forall x_1)(\exists x_2)A_1^2(x_1,x_2), B = (\forall y_1)(\forall y_2)\neg A_1^2(y_1,y_2)$.

(iii) $A = (\forall y)(B(y) \to C(y)), B = \neg B_1$ 这里 B_1 是下面的公式：

$B_1 = (\forall x)(\exists y)(B(y) \wedge Q(x,y)) \to (\exists z)(C(z) \wedge Q(x,z))$.

8. 设 E 为表达式，θ, λ, η 为置换.

(i) 说明为证明等式 $(E\theta)\lambda = E(\theta \circ \lambda)$ 对任何表达式 E 都成立，只需证明该等式当 E 为一个变元 x 时成立，并完成这种证明.

(ii) 说明为证明等式 $(\theta \circ \lambda) \circ \eta = \theta \circ (\lambda \circ \eta)$ 成立，只需证明该等式两边的置换作用于同一个变元 x 时得出同一个项来，并基于(i) 完成这种证明.

第7章 归结方法的简化

7.1 引　　言

归结方法是定理自动证明的重要工具. 在上一章中我们只研究了什么是归结方法以及归结方法的完备性问题，对于一个子句集 S 中的两个子句 C_1 与 C_2，我们也知道是否可以由 C_1 与 C_2 归结出新子句和怎样去归结. 然而一个重要的问题没有论及，即，如果从 C_1 与 C_2 可以作出归结式 C 来，那么是不是一定要把这个 C 归结出来？因为自动证明是通过机器来完成的，所以如果没有附加的指令，那么机器自然不懂对 S 中的哪一对可以进行归结的子句不进行归结. 换句话说，如果把 S 叫做 S^0，那么机器将对 S^0 中所有可以进行归结的子句对都进行归结而得出新子句集 S^1 来，然后又会对 $S^0 \cup S^1$ 中所有可以进行归结的子句都进行归结而得出又一轮新子句集 S^2 来，等等. 这对机器和对时间都是很大的浪费. 下面的典型例子取自文献[12]，它清楚地表明了这种浪费.

例 7.1.1　设 $S^0 = S = \{P \vee Q, \neg P \vee Q, P \vee \neg Q, \neg P \vee \neg Q\}$，则上述的 S^1 与 S^2 如下：

S^0：(1) $P \vee Q$

(2) $\neg P \vee Q$

(3) $P \vee \neg Q$

(4) $\neg P \vee \neg Q$

S^1：(5) Q　　(1),(2) 归结

(6) P　　(1),(3) 归结

(7) $Q \vee \neg Q$　　(1),(4) 归结

(8) $P \vee \neg P$　　(1),(4) 归结

(9) $Q \vee \neg Q$　　(2),(3) 归结

(10) $P \vee \neg P$　　(2),(3) 归结

(11) $\neg P$　　(2),(4) 归结

(12) $\neg Q$　　(3),(4) 归结

注意，S^1 的得出遵循了无遗漏原则，即，对 S^0 中凡可归结的子句对都作了归结，顺序是(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4). 其中(1,4) 与(2,3) 又各有两种归结式. 以下再在 $S^0 \cup S^1$ 的基础上进行无遗漏的归结，得

S^2：(13) $P \vee Q$　　(1),(7) 归结

(14) $P \vee Q$　　(1),(8) 归结
(15) $P \vee Q$　　(1),(9) 归结
(16) $P \vee Q$　　(1),(10) 归结
(17) Q　　(1),(11) 归结
(18) P　　(1),(12) 归结
(19) Q　　(2),(6) 归结
(20) $\neg P \vee Q$　　(2),(7) 归结
(21) $\neg P \vee Q$　　(2),(8) 归结
(22) $\neg P \vee Q$　　(2),(9) 归结
(23) $\neg P \vee Q$　　(2),(10) 归结
(24) $\neg P$　　(2),(12) 归结
(25) P　　(3),(5) 归结
(26) $P \vee \neg Q$　　(3),(7) 归结
(27) $P \vee \neg Q$　　(3),(8) 归结
(28) $P \vee \neg Q$　　(3),(9) 归结
(29) $P \vee \neg Q$　　(3),(10) 归结
(30) $\neg Q$　　(3),(11) 归结
(31) $\neg P$　　(4),(5) 归结
(32) $\neg Q$　　(4),(6) 归结
(33) $\neg P \vee \neg Q$　　(4),(7) 归结
(34) $\neg P \vee \neg Q$　　(4),(8) 归结
(35) $\neg P \vee \neg Q$　　(4),(9) 归结
(36) $\neg P \vee \neg Q$　　(4),(10) 归结
(37) Q　　(5),(7) 归结
(38) Q　　(5),(9) 归结
(39) $\square$　　(5),(12) 归结

我们看到,以上仍是遵循无遗漏原则,按序号对的字典序对(i),(j)作归结(如果可以归结的话),i从1开始,j从5开始(因为5以上已经在S^1中作过了)一直到12,凡可归结的都作归结.然后令$i=2$,j从5到12再过一遍,再下来令$i=3$,…依此类推,最终当$i=5$,$j=12$时才归结出了$\square$.归结方法到此停止.

我们对例7.1.1再作一些分析.我们看到,(13)～(16)都得出了同一个归结式$P \vee Q$,而且这个$P \vee Q$是原来S^0中就有的.如果提出一条规则:"重复的归结式不要".那么以上步骤自然会省掉许多.但机器怎么去执行这条原则呢?在未归结之前机器怎么会知道将要归结出的子句是否和已有的子句重复呢?所以这条规则是"马后炮"式的规则,没有实际用处.然而可能有许多可以实际操作且能使归结方法得

到简化的规则. 比如,下面这条规则就可简化归结过程,它可以作为 7.2 节中 PI 归结规则的特例而得到证明.

命题 7.1.1 设 $S=\{C_1,\cdots,C_n\}$ 是子句集,I 是任意给定的解释,则 S 不可满足当且仅当 S 存在这样一种归结证明:在整个归结过程中对同时被 I 所满足的子句对不作归结.

例 7.1.2 根据上述规则,例 7.1.1 的归结证明可以大为简化. 事实上,设 $I=\{P,Q\}$,即解释 I 使文字 P 和 Q 为真,那么 I 使前 3 个子句都为真,只使第 4 个子句为假. 这时前 3 个子句之间不作归结. 归结证明如下,其中(5) 不被 I 所满足,所以(1) 与(5) 以及(3) 与(5) 之间的归结均符合命题 7.1.1.

(1) $P \vee Q$ S
(2) $\neg P \vee Q$ S
(3) $P \vee \neg Q$ S
(4) $\neg P \vee \neg Q$ S
(5) $\neg P$ (2),(4)
(6) Q (1),(5)
(7) $\neg Q$ (3),(5)
(8) $\square$ (6),(7)

例 7.1.3 设

$$S=\{P(y),P(a)\vee Q(x),\neg P(x)\vee Q(y),\neg P(x)\vee R(a),\neg Q(a)\vee \neg R(a)\},$$

试证 S 不可满足.

证明 作 Herbrand 解释 $I=\{P(a),Q(a),\neg R(a)\}$(这时 Herbrand 域只含一个元 a),这时 I 不满足第 4 个子句 $\neg P(x)\vee R(a)$,但满足其余各子句. S 的归结证明如下:

(1) $P(y)$ S
(2) $P(a)\vee Q(x)$ S
(3) $\neg P(x)\vee Q(y)$ S
(4) $\neg P(x)\vee R(a)$ S
(5) $\neg Q(a)\vee \neg R(a)$ S
(6) $R(a)$ (1),(4)
(7) $\neg Q(a)$ (5),(6)
(8) $\neg P(x)$ (3),(7)
(9) $\square$ (1),(8)

注 7.1.1 以上 4 对归结中都有一个不被 I 所满足的子句,从上到下依次为(4),(6),(7) 和(8). 这时还有若干子句对可以进行归结,如(1) 与(3),(2) 与(3),

(3) 与(5) 等. 但它们都被 I 所满足,所以根据命题 7.1.1,我们不作这些归结. 并称此限制为关于 I 的**同类不归结原则**. 又,读者不难发现在以上归结证明中(2) 是多余的,可以删去,请与(1) 作比较说明它的道理. 还有,逻辑有效公式像 $P(y) \vee \neg P(y)$ 等当然也可以删去而不影响子句集的不可满足性,为什么?

本章在以下各节中介绍若干可以使归结方法得到简化的有效方法.

7.2 语义归结

解释是属于逻辑学中的语义理论的,所以凡与某解释相联系的归结都可叫做语义归结,如命题 7.1.1 中的归结就是一种语义归结. 下面介绍 PI 归结,这里 P 指关于谓词符号(predicate symbol) 的一种顺序,I 是一个特定的解释.

定义 7.2.1 设有子句集$\{E_1,\cdots,E_m,N\}$,其中各子句中出现的谓词符号的全体已经排好了顺序 P,I 是一个解释. 如果

(i) $I \models E_i$ 不成立($i = 1,\cdots,m$).

(ii) 把 N 记为 R_1,由 R_i 与 E_i 可以归结出 R_{i+1}($i = 1,\cdots,m$).

(iii) 当由 R_i 与 E_i 归结出 R_{i+1} 时,E_i 中被消文字中的谓词符号是 E_i 中各谓词符号中序号最大者.

(iv) $I \models R_{m+1}$ 不成立.

那么称$\{E_1,\cdots,E_m,N\}$ 为关于 P 与 I 的**语义冲撞**(semantic clash),简称 **PI 冲撞**,R_{m+1} 叫$\{E_1,\cdots,E_m,N\}$ 的 **PI 归结式**. 又,称 N 为**核**(nuclear),称 E_i 为**电子**(electron)($i = 1,\cdots,m$). 这种归结方式叫 **PI 归结**.

例 7.2.1 设 $E_1 = \neg Q \vee \neg W, E_2 = \neg R \vee \neg W, N = Q \vee R \vee \neg W$, $I = \{Q,R,W\}$,序 P 为 $W < R < Q$. 这时

(i) $I \models E_1$ 与 $I \models E_2$ 都不成立.

(ii) N 与 E_1 归结时消去了 E_1 中序号最大的文字 $\neg Q$,得 $R \vee \neg W$,$R \vee \neg W$ 再与 E_2 归结又消去了 E_2 中序号最大的 $\neg R$,得 $\neg W$.

(iii) $I \models \neg W$ 不成立.

所以$\{E_1,E_2,N\}$ 是一个 PI 冲撞,$\neg W$ 是 PI 归结式.

注意,在上例中$\{E_1,N\}$ 不是 PI 冲撞,因为 I 满足 N 与 E_1 的归结式 $R \vee \neg W$. 同理$\{E_2,N\}$ 也不是 PI 冲撞. 又,如果把顺序 P 调整为 $Q < R < W$,则$\{E_1,E_2,N\}$ 就不再构成 PI 冲撞了,这时 N 与 E_1 归结的第一步就走不通,因为被消文字 $\neg Q$ 中的谓词符号 Q 不是 E_1 中两个谓词符号 Q 与 W 中的最大者.

例 7.2.2 设 $E_1 = \neg Q, E_2 = \neg R, E_3 = \neg W, N = Q \vee R \vee W$ 且 $I = \{Q, R,W\}$,则因为 E_1,E_2,E_3 都是单子句,可验证对任何 Q,R,W 之间的顺序 P 而言$\{E_1,E_2,E_3,N\}$ 都是 PI 冲撞且 PI 归结式为 □.

像例 7.2.2 这种由一次 PI 冲撞就得出空子句 □ 的情形是很少的. 当就一个子句集 S 作归结证明时一般都需进行多次 PI 冲撞.

定义 7.2.2　设 S 是子句集，I 是一个解释，P 是 S 中出现的谓词符号的一个排序，S 的 **PI 推理**是这样一种推理：推理中出现的子句或属于 S，或为一个 PI 归结式，相应的 PI 归结可以用到 S 的子句以及前面作 PI 归结时所得出的 PI 归结式. 用 PI 推理得出空子句 □ 的过程叫 S 的 **PI 证明**.

例 7.2.3　重新考虑例 7.1.1 中的 S. 设 $I=\{P,Q\}$，谓词符号的排序为 $Q<P$，则图 7.2.1 表示 S 的一个 PI 证明，其中用到了 3 次 PI 冲撞，即 $\{\neg P\vee\neg Q, P\vee\neg Q\}$，$\{\neg Q,\neg P\vee Q\}$ 和 $\{\neg Q,\neg P,P\vee Q\}$，且归结式都在上下主线上. 注意，对于第一个 PI 冲撞而言，一定要把 $\neg P\vee\neg Q$ 中序号大的文字 $\neg P$ 消去. 对于第二、第三个 PI 冲撞而言，因为 $\neg Q$ 只含有一个谓词符号，所以可将其在 PI 归结中消去.

例 7.2.4　仍考虑上例，但把谓词符号的排序改为 $P<Q$. 这时 E_1 仍为 $\neg P\vee\neg Q$（因为它是唯一不被 I 所满足的子句）. 但作为 N 不能再使用 $P\vee\neg Q$，否则将在归结中把序号小的 $\neg P$ 消去，就不符合 PI 冲撞的规定了，S 的新的 PI 证明如图 7.2.2 所示.

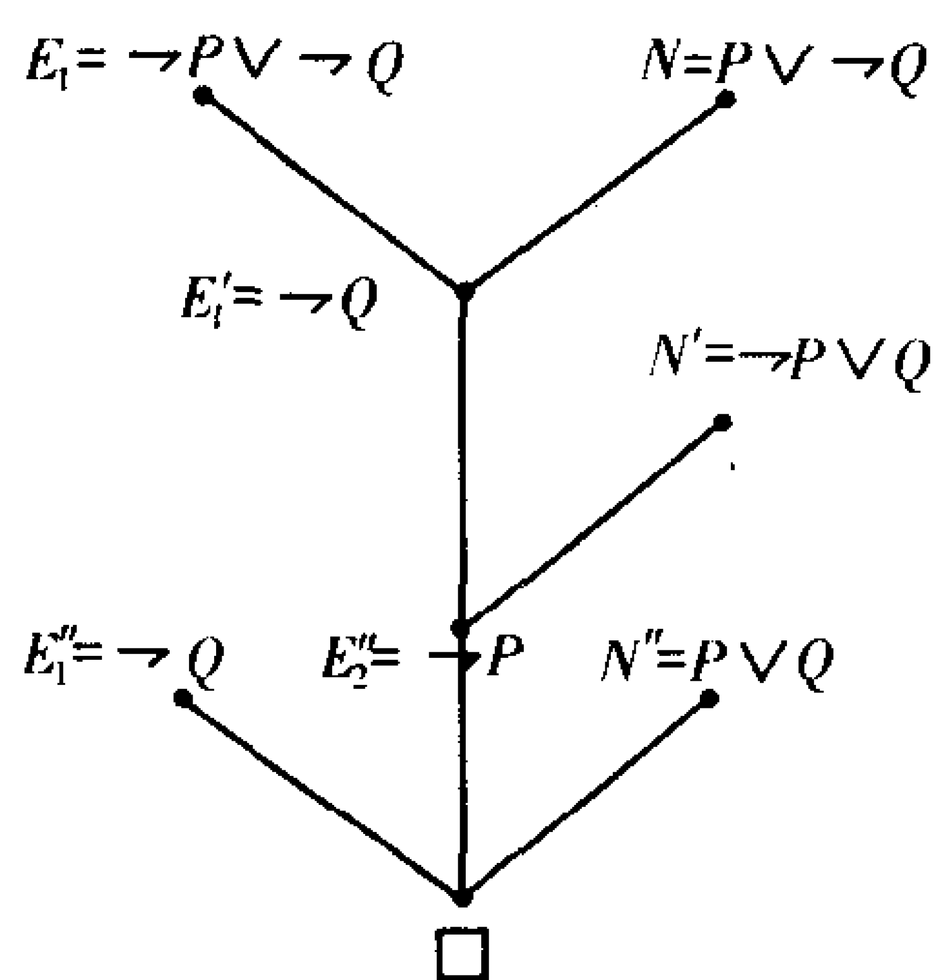


图 7.2.1

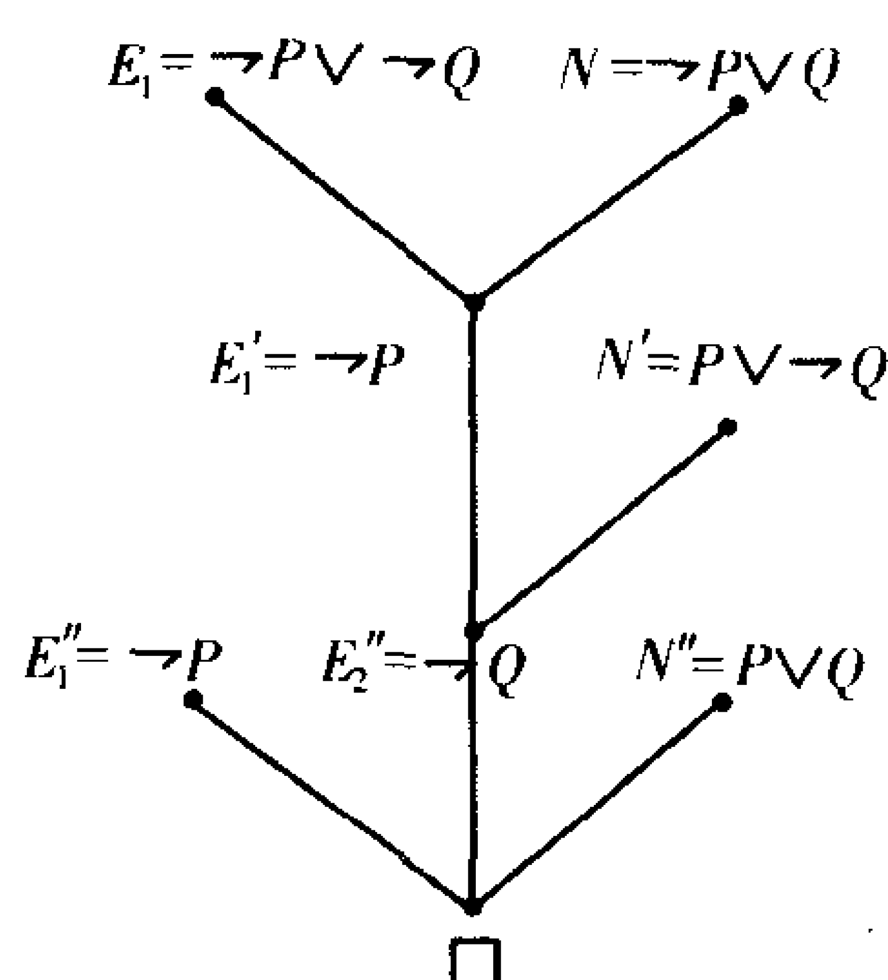


图 7.2.2

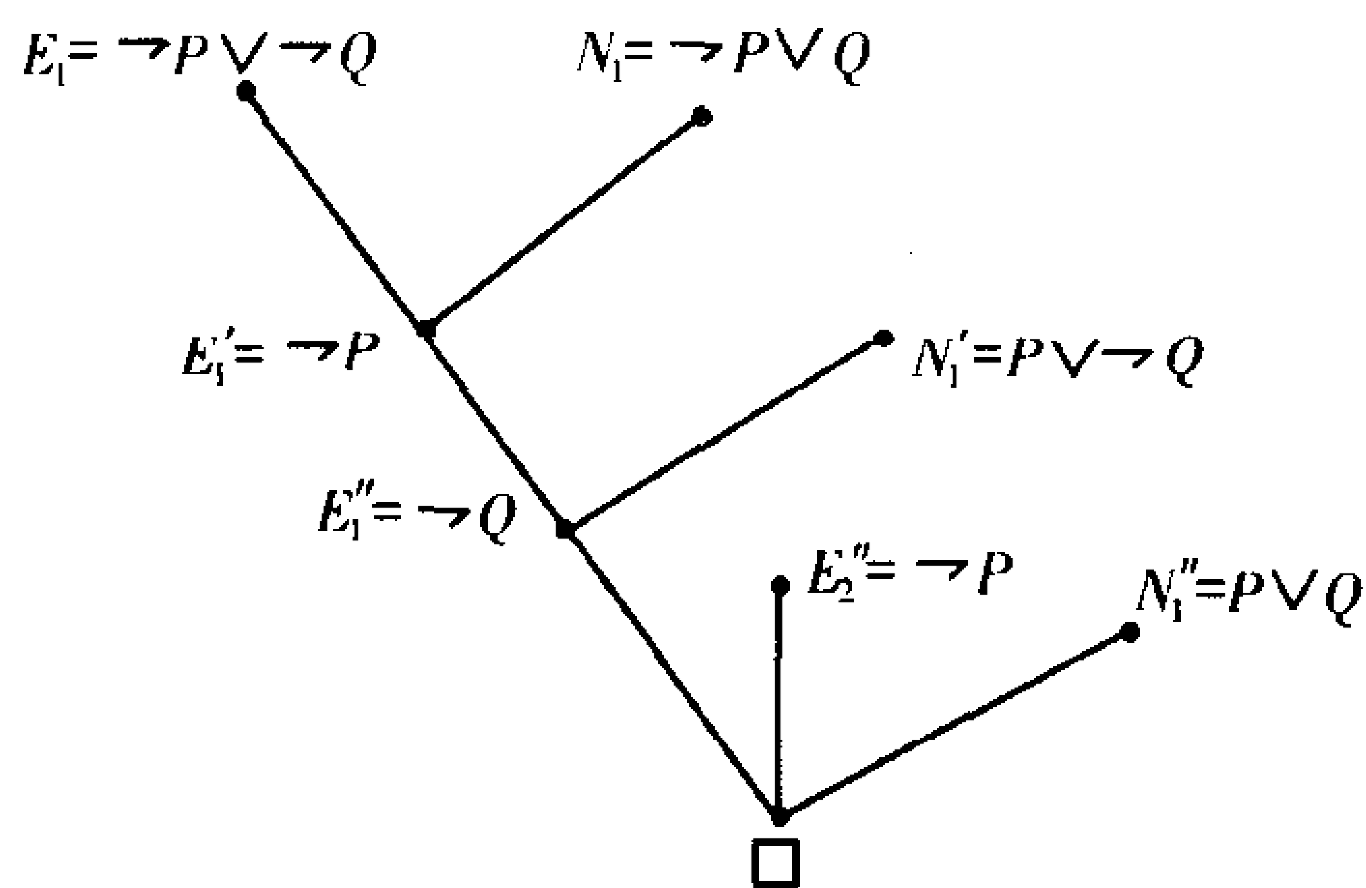


图 7.2.3

注意，在最后一个 PI 冲撞$\{E_1''=\neg P, E_2''=\neg Q, N''=P\vee Q\}$中，由于前两项均含一个文字，谓词顺序不起作用，所以也可把它改为$\{\neg Q, \neg P, P\vee Q\}$，这时图 7.2.2 也有相应的变化，同时上下主线也可画成斜线，如图 7.2.3 所示.

注 7.2.1　在 PI 证明中，对于每次的 PI 推理而言，每一对进行归结的子句中始终有一个不被 I 所满足. 这一情况与命题 7.1.1 的要求相一致，即，同类不归结. 但它提出了更强的要求，即，在进行归结时不符合谓词符号间预先指定的顺序的文字不能消去. 这样就进一步缩小了可进行归结的子句对的范围. 如果对于每个不可满足的子句集 S 而言都存在 PI 证明，那就在很大程度上简化了 S 的归结证明，因为若 S 中含有 k 个谓词符号，则特定的排序只是全部可能排序的 $1/k!$. 后面的命题 7.2.1 肯定了这一事实. 其证明需要两个引理.

引理 7.2.1　设 S 是有限的基子句集，I 是一个 Herbrand 解释，P 是 S 中谓词符号的一个排序. 如果 S 不可满足，则 S 有一个 PI 证明.

证明　我们用归纳法证明本引理. 用 A 表示 S 中的基原子之集. 如果 A 中只含一个基原子 Q，则 S 含有单子句 Q 与 $\neg Q$，这时 S 显然有一个 PI 证明.

设引理当 A 中含有不多于 n 个基原子时成立，现在 A 中含有 $n+1$ 个基原子.

先假定 S 中有一个单子句 L 且 $I\models L$ 不成立. 根据 5.6 节中的单文字规则，删去 S 中含有 L 的基子句，并且删去所有含 $\neg L$ 的基子句中的 $\neg L$ 就得到一个不可满足的基子句集 S'，与 S' 相应的基原子的个数不多于 n（因为至少 L 中的基原子已被删去了）. 由归纳假设，S' 有一个 PI 证明，即，S' 有一个可归结出空子句 □ 的 PI 推理. 设相应的 PI 冲撞为$\{E'_1, \cdots, E_m', N'\}$. 如果 $E_i'\notin S$，则 E_i' 是由 S 中的某基子句 E_i 删去所含的 $\neg L$ 而得出的，这时 E_i' 是由 S 中的 PI 冲撞$\{L, E_i\}$得出的 PI 归结式 $(1\leqslant i\leqslant m)$，从而$\{E_1', \cdots, E_m'\}$可作为电子序列与 S 中某适当的 N^* 配合而构成 S 的一个 PI 冲撞. 如果 $N'\in S$，令 $N^*=N'$ 则$\{E_1', \cdots, E_m'\}$就是 S 中的 PI 冲撞且可由相应的 PI 推理得出空子句 □. 如果 $N'\notin S$，则 S 中有基子句 N 使 N' 可由 N 删去其中的 $\neg L$ 而得，这时增添一个电子 L 就得到 S 的 PI 冲撞$\{E_1', \cdots, E_m', L, N\}$，由相应的 PI 推理仍可得出空子句 □.

现在设 S 中不含有关于解释 I 不真的单子句. 在 A 中选取一个基原子 B 使得 S 中有一个子句含有 B，并且 B 中的谓词符号（即，B 自身或 $\neg B$）的序号最小. 这时 B 与 $\neg B$ 中有一个关于 I 非真，记为 L. 在 S 中删去所有含有文字 $\neg L$ 的子句，再在其余含有 L 的子句中删去 L，得一新子句集 S'. 不难证明 S' 仍是不可满足的，这时 S' 中含有不多于 n 个基原子. 由归纳假设，S' 有一个 PI 证明 D'，即，存在一个 PI 冲撞$\{E'_1, \cdots, E_m', N'\}$使相应的 PI 归结式为 □. 如果 $E_i'\notin S$，且 $N'\in S$，则证明已完成. 否则，当某 $E_i'\notin S$，或 $N'\notin S$ 时只要给 E_i' 或 N' 添加一个析取项 L，因为 I 不满足 L，所以就得出 S 的一个 PI 冲撞且相应的 PI 归纳式从 □ 变为 L，这是因为 L 中的谓词符号的序号最小，不会被消去. 以 D^* 记这个 S 的 PI 推理，则由 D^* 可归结

出 L 来，考虑子句集 $S \cup \{L\}$. 因为 $S \cup \{L\}$ 中含有单子句 L 且 $I \models L$ 不成立，所以由前一段的证明知 $S \cup \{L\}$ 有一个 PI 证明 $\bar{D}$. 因为 $\bar{D}$ 可能用到的 L 是 S 的 PI 归结式，所以 $\bar{D}$ 也是 S 的 PI 证明. 这就证明了引理 7.2.1.

定义 7.2.3 设 S 是子句集.

(i) 以 $[S]$ 表示从 S 出发可得出的归结式以及 S 中子句的全体之集. 以 $[S]_n$ 表示从 S 出发经过不超过 n 次($n \geqslant 0$) 归结而得的子句的全体之集.

(ii) 设 C_1, C_2 是 S 的二子句，用 $C = (C_1, C_2)$ 表示 C 是 C_1 与 C_2 的归结式.

(iii) 约定 $(C, C) = C$.

定义 7.2.4 设 S_1 与 S_2 是二子句集，$f: S_1 \to S_2$ 是映射. 映射 $F: [S_1]_n \to [S_2]$ 叫 f 的**保归结扩张**，若

(i) $F | S_1 = f$.

(ii) 当 $C = (C_1, C_2) \in [S_1]_n$ 时，$F(C) = (F(C_1), F(C_2))$.

引理 7.2.2 设 S 是有限子句集，S' 是 S 中子句的基例构成的有限集. 对每个 $C' \in S'$，选定 $C \in S$ 使 C' 是 C 的基例，并以 $f(C')$ 记此 C，则得一映射 $f: S' \to S$. 设 $n \geqslant 1$ 已给定，这时

(i) f 有一个保归结扩张 $F: [S']_n \to [S]$.

(ii) 对每个 $E' \in [S']_n$，E' 是 $F(E')$ 的基例.

证明 称 S' 中的子句为 S' 的 0 级子句. 设 S' 的 k 级子句已定义，E'_1 与 E'_2 是 S' 的两个不超过 k 级的子句，且其中至少有一个是 S' 的 k 级子句，则当 (E'_1, E'_2) 存在时，称其为 S' 的 $k+1$ 级子句($k = 0, 1, \cdots$). 以 $[S']_k$ 记 S' 的 $\leqslant k$ 级的子句的全体之集. 由提升引理知，若 $E'_1 = (C'_{11}, C'_{12})$ 和 $E'_2 = (C'_{21}, C'_{22})$ 是 S' 的两个 $\leqslant 1$ 级的子句，则 $[S]$ 中有子句 $C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}, E_1$ 和 E_2 使

$$C_{ij} = f(C'_{ij}), \quad i, j = 1, 2, \tag{7.2.1}$$

$$E_1 = (C_{11}, C_{12}), \quad E_2 = (C_{21}, C_{22}), \tag{7.2.2}$$

$$E'_i \text{ 是 } E_i \text{ 的基例}, \quad i = 1, 2. \tag{7.2.3}$$

分别以 $f_1(E'_1)$ 和 $f_1(E'_2)$ 记 E_1 与 E_2，且设 $f_1 | S' = f$，则 $f_1: [S']_1 \to [S]$ 是 f 的保归结扩张，且对每个 $E' \in [S']_1$，E' 是 $f_1(E')$ 的基例. 设当 $k \leqslant m$ 时 f 已有保归结扩张 $f_k: [S']_k \to [S]$，且对每个 $E' \in [S']_k$，E' 是 $f_k(E')$ 的基例. 设 $E'_1 = (C'_{11}, C_{12}')$ 和 $E'_2 = (C''_{21}, C''_{22})$ 是 S' 的不超过 $m+1$ 级的子句，且其中至少有一个是 S' 的 $m+1$ 级子句，则由提升引理知 $[S]$ 中有子句 $C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}, E_1$ 和 E_2 使式(7.2.1)、式(7.2.2)、式(7.2.3) 成立. 分别以 $f_{m+1}(E'_1)$ 和 $f_{m+1}(E'_2)$ 记 E_1 和 E_2，且设 $f_{m+1} | [S']_m = f_m$，则 f_{m+1} 是 f 的保归结扩张，且对每个 $E' \in [S']_{m+1}$，E' 是 $f_{m+1}(E')$ 的基例. 设 $[S']$ 中级别最大的子句为 n 级子句. 令 $F = f_n$，则 F 即满足引理 7.2.2 中的两个条件.

命题 7.2.1(PI 归结的完备性定理) 设 S 是有限子句集，则 S 有一个 PI 证明

当且仅当 S 不可满足.

证明　设 S 有一个 PI 证明,则 S 有一个证明,所以由归结原理的完备性知 S 不可满足.

反过来,设 S 不可满足,则由 Herbrand 定理 Ⅱ 知 S 有一个不可满足的有限基例集 S'. 由引理 7.2.1,S' 有一个 PI 证明,即,存在 PI 冲撞 $D' = \{E'_1, \cdots, E'_m, N'\}$ 使相应的 PI 归结式为空子句 □. 设 $f: S' \to S$ 如引理 7.2.2 所述,且从 S' 归结出 □ 最多经过 n 次归结,$F: [S']_n \to [S]$ 是其保归结扩张. 这时 E'_i 是 $F(E'_i)$ 的基例,且由 $I \models E'_i$ 不成立知 $I \models F(E'_i)$ 也不成立($i = 1, \cdots, m$). 又,N' 是 $F(N')$ 的基例,所以由 F 是保归结扩张知 $D = \{F(E'_1), \cdots, F(E'_m), F(N')\}$ 是 S 的 PI 推理,且由 D' 是从 S' 到 □ 的 PI 推理知 D 是从 S 到 □ 的 PI 推理,所以 S 有一个 PI 证明.

推论 7.2.1　命题 7.1.1 成立.

证明　设 $S = \{C_1, \cdots, C_n\}$ 是不可满足的子句集,I 是任意给定的解释. 任意固定一种对 S 中出现的谓词符号的排序 P,则由命题 7.1.1 知 S 有一个 PI 证明. 由 PI 证明的定义知在从 S 经 PI 推理到 □ 的整个归结推理过程中始终未对两个同时被 I 所满足的子句进行过归结. 所以这个 PI 证明就是符合命题 7.1.2 中要求的 S 的归结证明. 反过来,若 S 有命题 7.1.1 中所述的归结证明,则由归结原理的完备性知 S 不可满足.

注 7.2.2　在 PI 归结中由于 I 和 P 可以随意选择,所以根据子句集 S 的特点选择适当的 I 或序往往可以在很大程度上简化归结证明或作出判断. 以命题 7.1.1 的应用为例,设 $S = \{P, P \lor \neg Q, Q \lor \neg R, R \lor \neg S, \neg S \lor W, \neg W\}$. 因为大多数子句中都含有带否定词 $\neg$ 的文字,可设解释 $I = \{\neg P, \neg Q, \neg R, \neg S, \neg W\}$,这时 S 中的后 5 个子句之间都不可作归结,而第 1 个子句 P 又不能和这后 5 个子句中的任意一个作归结,所以 S 没有满足同类不归结原则的证明,S 是可满足的. 事实上,将 I 中的 $\neg P$ 改为 P 就得到 S 的一个模型. 基于这种思想,就有所谓正的和负的**超归结**方法,还有类似的**支持集归结**方法等. 关于这些方法及其在计算机上的实现可参看文献[12].

习　题　7.2

1. 判断以下的 $\{E_1, \cdots, E_m, N\}$ 是否构成一个 PI 冲撞,并在肯定情形下求出 PI 归结式来:

(i) $E_1 = A, E_2 = B, E_3 = C, N = \neg A \lor \neg B \lor \neg C \lor \neg W$,

　解释 $I = \{\neg A, \neg B, \neg C, W\}$,

　顺序 P 为 $A < B < C < W$.

(ii) 同(i),但将顺序任意改变,如,改为 $W < C < B < A$.

(iii) $E_1 = A \lor C, E_2 = B \lor C, N = \{\neg A \lor \neg B \lor C\}$,

　解释 $I = \{\neg A, \neg B, \neg C\}$,

顺序 P 为 $C < B < A$.

(iv) 同(3),但将顺序 P 改为

(1) $C < A < B$.

(2) $A < B < C$.

(v) $E_1 = A(a), E_2 = B(a,b) \vee C(b,c), N = \neg A(x) \vee \neg B(x,y) \vee E(x)$,

解释 $I = \{\neg A(a), A(b), \neg B(a,b), \neg C(b,c), \neg E(a)\}$,这里略去了无关的基原子,如 $B(a, a), B(b,b)$ 和 $B(b,c)$ 等.

顺序 P 为 $C < E < B < A$/

2. 设 $S = \{A \vee B, \neg A \vee \neg C, B \vee C, C \vee E, \neg B \vee \neg E, \neg C \vee \neg B\}$,解释 $I = \{A, B, \neg C, E\}$. 写出 S 的一个归结证明,使任二被归结的子句不同时被 I 所满足.

3. S 与 I 与第 2 题相同,再规定各谓词符号之间的顺序 P 为 $A < C < B < E$,写出 S 的一个 PI 证明来,并用语义树表示.

4. S 与 I 与第 2 题相同,但规定 $E < A < B < C$,则 PI 证明的语义树变得更复杂,但这种树存在. 画出这个语义树来.

5. 设 $S = \{\neg A(a) \vee B(a) \vee C(b), \neg A(a) \vee B(a) \vee Q(a,b), A(a), P(x), \neg Q(a,y) \vee P(y), \neg P(x) \vee \neg B(x), \neg P(x) \vee \neg C(x)\}$,则 S 的 Herbrand 域 $H = \{a,b\}$. 令

$I = \{\neg A(a), \neg A(b), \neg P(a), \neg P(b), \neg B(a), \neg B(b), \neg C(a), \neg C(b), \neg Q(a,a), \neg Q(a,b), \neg Q(b,a), \neg Q(b,b)\}$.

(i) 写出 S 的一个归结证明,使任二被归结的子句不同时被 I 所满足.

(ii) 再规定谓词符号间的顺序为 $A < B < C < P < Q$,求出 S 的一个 PI 证明来.

7.3 锁归结

我们在本章开始时通过例 7.1.1 说明了如果不对归结方式作任何限制,那么归结证明的过程就可能非常繁长. 同时我们已经看到,如果对归结方法作某些限制,比如,同类不归结以及 PI 归结等都可简化归结证明. PI 归结当然符合同类不归结原则,此外它还就谓词符号的排序进一步对归结方法提出了限制. 一个明显的事实是:限制越多,可以进行归结的子句就越少,从而归结过程就越简单. 当然,这种限制以不影响归结原理的完备性为前提. 在本节中我们不预先固定任何解释,但从顺序的角度加强对被删去文字的要求,即使同一谓词符号在不同的子句中(甚至在同一子句的不同文字中)也有不同的序号. 这个序号写在各文字的前面左下角,如 ${}_1A, {}_2\neg B, {}_3\neg C$ 等,并规定在作归结时各子句中被消去文字在该子句中的序号**最小**.

例 7.3.1 仍考虑例 7.1.1 中的 S. 把 S 的 4 个子句中的文字(共 8 个)编号写出如下:

(1) ${}_1P \vee {}_2Q$

(2) ${}_3P \vee {}_4\neg Q$

(3) $_{6}\neg P \vee {}_{5}Q$

(4) $_{8}\neg P \vee {}_{7}\neg Q$

按照作归结时应删去子句中序号小的文字的规定，原来可以作归结的许多子句对，即(1)与(2)、(1)与(3)、(1)与(4)、(2)与(3)以及(2)与(4)因为不符合消去序号最小文字的要求而均不允许作归结，好像它们都被锁住了，唯有(3)与(4)可以作归结，这时被消去文字$_{5}Q$与$_{7}\neg Q$在(3)与(4)中均为序号小的文字. 所得归结式为

(5) $_{6}\neg P$

这里进一步规定了同一个文字若在某子句中出现多于1次，则只保留序号最小的一个. 现在(1)与(5)以及(2)与(5)均可作归结，得

(6) $_{2}Q$ (1),(5)

(7) $_{4}\neg Q$ (2),(5)

最终得出

(8) □ (6),(7)

与例7.1.2相比较，两个方法都在第8步归结出□. 但二者遵循的原则不同，前者遵循了同类不归结原则，而后者遵循的是消去小序号文字的原则. 在进行归结时判断一个子句是否被某给定的解释 I 所满足似乎并不难，但消去小序号文字则更易掌握. 有趣的是，如果有限子句集 S 不可满足，则无论给 S 中出现的文字怎样编号，遵循删去序号最小文字的原则总可归结出空子句 □ 来.

例 7.3.2 仍考虑上例中的 S，但文字序号改变如下：

(1) $_{8}P \vee {}_{7}Q$

(2) $_{6}P \vee {}_{5}\neg Q$

(3) $_{4}\neg P \vee {}_{3}Q$

(4) $_{2}\neg P \vee {}_{1}\neg Q$

这时(1)与(2)，(3)与(4)都可作归结：

(5) $_{6}P$ (1),(2)

(6) $_{2}\neg P$ (3),(4)

最后得

(7) □ (5),(6)

对于本例中的8个文字而言，有 $8! = 40320$ 种排序方法. 按其中任一种排序都可按删去序号最小文字而归结出 □ 来. 读者不妨一试.

以上的归结方法属于所谓锁归结的范畴. 为说明锁归结的基本思想，我们选择了不含变元的子句作例子. 以下介绍一般的归结理论，设各子句中的文字都已编了号.

定义 7.3.1 设 C 是子句.

(i) 设 C 中含有不同编号的同一文字，则删去编号较大的文字，这一方法叫

合并.

(ii) 设 C 中若干文字有一个 mgu σ,对 $C\sigma$ 进行合并所得的子句叫 C 的**锁因子**.

(iii) C 的锁因子的锁因子也叫 C 的锁因子.

例 7.3.3 设 $C={}_1A(x)\vee{}_2\neg B(a)\vee{}_3A(a)\vee{}_4\neg B(y)$,则${}_1A(x)$ 与${}_3A(a)$ 有一个 mgu $\sigma=\{a/x\}$,这时 $C\sigma={}_1A(a)\vee{}_2\neg B(a)\vee{}_3A(a)\vee{}_4\neg B(y)$. 将${}_1A(a)$ 与${}_3A(a)$ 合并为${}_1A(a)$ 就得到 C 的锁因子 $C'={}_1A(a)\vee{}_2\neg B(a)\vee{}_4\neg B(y)$. ${}_2\neg B(a)$ 与${}_4\neg B(y)$ 有一个 mgu $\lambda=\{a/y\}$,$C'\lambda={}_1A(a)\vee{}_2\neg B(a)\vee{}_4\neg B(a)$. 将${}_2\neg B(a)\vee{}_4\neg B(a)$ 合并为${}_2\neg B(a)$ 得到 C' 的锁因子${}_1A(a)\vee{}_2\neg B(a)$,它也是 C 的锁因子.

定义 7.3.2 设 C_1 与 C_2 是不含相同变元的二子句,分别含有文字 L_1 与 L_2,且 L_1 与 L_2 分别是 C_1 与 C_2 中编号最小的文字. 如果 L_1 与 $\neg L_2$ 有一个 mgu σ,将 $C_1\sigma$ 与 $C_2\sigma$ 作归结并进行合并,所得的子句 C 叫 C_1 与 C_2 的**二元锁归结式**.

例 7.3.4 设 $C_1={}_1A(x)\vee{}_2B(x)\vee{}_3E(x)$,$C_2={}_4\neg A(a)\vee{}_5B(a)$. 先归结再进行合并得 $C={}_2B(a)\vee{}_3E(a)$,C 就是 C_1 与 C_2 的二元锁归结式.

定义 7.3.3 设 C_1 与 C_2 是二子句. 按以下 4 种方法所得的子句都叫做 C_1 与 C_2 的**锁归结式**:

(i) C_1 与 C_2 的二元锁归结式.

(ii) C_1 与 C_2 的锁因子的二元锁归结式.

(iii) C_1 的锁因子与 C_2 的二元锁归结式.

(iv) C_1 的锁因子与 C_2 的锁因子的二元锁归结式.

求锁归结式的过程叫**锁归结**.

定义 7.3.4 设 S 是有限子句集,其中全部文字已编号. 从 S 出发的归结推理叫**锁推理**,如果推理中的归结均为锁归结. 从 S 出发经锁推理得出空子句□的过程叫 S 的**锁证明**.

例 7.3.5 重新考虑例 6.3.5(iv),但对后两个子句作了添加,并对所得子句集 S 中的文字作如下编号,试用锁归结方法验证 S 有一个锁证明:

(1) ${}_1\neg A(x)\vee{}_2B(x)\vee{}_3Q(x,f(x))$

(2) ${}_4\neg A(x)\vee{}_5B(x)\vee{}_6C(f(x))$

(3) ${}_7A(a)$

(4) ${}_8P(a)$

(5) ${}_9\neg Q(a,y)\vee{}_{10}P(y)$

(6) ${}_{11}\neg P(x)\vee{}_{12}\neg B(x)\vee{}_{13}\neg B(a)$

(7) ${}_{14}\neg P(x)\vee{}_{15}\neg C(x)\vee{}_{16}\neg C(f(a))$

由锁归结方法可依次得出以下各子句,最终可得出 S 的一个锁证明,其中(9) 与 (12) 都用到了合并:

(8)　${}_2B(a) \vee {}_3Q(a,f(a))$　　(1),(3)

(9)　${}_{12}\neg B(a)$　　(4),(6)

(10)　${}_3Q(a,f(a))$　　(8),(9)

(11)　${}_{10}P(f(a))$　　(5),(10)

(12)　${}_{15}\neg C(f(a))$　　(7),(11)

(13)　${}_5B(a) \vee {}_6C(f(a))$　　(2),(3)

(14)　${}_6C(f(a))$　　(9),(13)

(15)　□　　(12),(14)

注意,本例中共有 16 个文字,各种不同的排序多达 16!种,按任何一种排序都可得出 S 的锁证明.作为练习,请读者完成习题 7.3 的第 2 题.又,锁归结方法是完备的,即,若有限子句集 S 有锁证明,S 自然是不可满足的.反过来,若 S 不可满足,则对 S 中的文字无论采取何种排序,必然可以作出 S 的相应的锁证明来.我们先证明两个引理.

引理 7.3.1　设 C_1 与 C_2 是二子句,其中出现的文字已统一编号.C_1' 与 C_2' 分别是 C_1 与 C_2 的例,且 C' 是 C_1' 与 C_2' 的锁归结式,则 C_1 与 C_2 有锁归结式 C,且 C' 是 C 的例.

证明　锁归结与一般归结的不同之处有两点,一是遵循小序号文字优先删去原则,一是合并.但合并也不是新方法,按原来的观点看,只不过要求重复的文字应当删去而已,并留下序号小的文字.回顾提升引理 6.4.1 的证明,那里子句 C 的得出完全是仿照由 C_1' 与 C_2' 归结出 C' 的方式而实现的.所以当初如果由 C_1' 与 C_2' 归结出 C' 时遵循了小序号文字优先删去的原则,那么由 C_1 与 C_2 归结出 C 时自然也保持了这种小序号优先删去原则.所以由提升引理即得引理 7.3.1.

引理 7.3.2　设 S 是有限的基子句集,其中全部文字已经编号.如果 S 不可满足,则 S 有一个基于该编号的锁证明.

证明　用 $\alpha(S)$ 表示 S 中的全部编号文字的个数减去 S 中子句的个数所得之差.如果 $\alpha(S)=0$,则 S 中全部为单子句,这时编号在归结时不起作用,所以由归结原理的完备性知 S 有一个证明,该证明也是 S 的锁证明.设当 $\alpha(S)<n$ 时引理成立 $(n\geqslant 1)$,今 $\alpha(S)=n$.这时由 $\alpha(S)>0$ 知 S 中至少有一个子句不是单子句.设这种子句中含有编号最大的文字的子句为 $C=C' \vee {}_kL$,这里 k 是那个最大的编号.从 S 中删去子句 C 并分别添加子句 C' 和单子句 ${}_kL$,分别得到子句集 S_1 与 S_2,显然 S_1 与 S_2 都不可满足(为什么?).S_1 与 S 的差别在于用子句 C' 取代了子句 C,所以 S_1 与 S 相比较,子句个数相同但少了一个文字 ${}_kL$.S_2 与 S 的差别在于用单文字 ${}_kL$ 取代了子句 C,所以 S_2 与 S 相比较,子句的个数仍不变,但少了至少一个文字,因为 C' 中带编号的文字全丢掉了.由此可知,$\alpha(S_1)<n$,$\alpha(S_2)<n$.从而由归纳假设知 S_1 与 S_2 分别有锁证明 D_1' 与 D_2'.如果 D_1' 不涉及 C' 中的文字,那么 D_1' 就是 S 的锁证明.

如果 D_1' 用到了 C'，那么将 D_1' 进行改造，把$_kL$ 作为一个析取项添加回 C' 而得 C. 因为 D_1' 是从 S_1 到 □ 的锁归结，添加的$_kL$ 有最大编号，添加$_kL$ 后在各次归结中$_kL$ 总不被消去，所以就得到一个从 S 到$_kL$ 的锁推理. 既然可得出$_kL$，那么从 S_2 到 □ 的锁推理也就是从 S 到 □ 的锁推理. 所以 S 仍有一个锁证明.

命题 7.3.1（锁归结的完备性定理） 设 S 是有限子句集，其中文字已全部编号，则 S 不可满足当且仅当 S 有基于该编号的一个锁证明.

证明 只需证明 S 不可满足时 S 有一个基于给定编号的锁证明. 设 S 不可满足，则由 Herbrand 定理 II 知 S 有一个不可满足的有限基例集 S'. 设 S' 中的基文字保持原来的编号，即，若 S' 的子句 $C' = L_1' \vee \cdots \vee L_n'$ 是 S 的子句 $C = {}_{k_1}L_1 \vee \cdots \vee {}_{k_n}L_n$ 的基例，则令 C' 中文字 $L_1', \cdots, L_n'$ 的编号分别为 $k_1, \cdots, k_n$，也就是 $C' = {}_{k_1}L_1' \vee \cdots \vee {}_{k_n}L_n'$. 由引理 7.3.2，$S'$ 有一个基于上述编号的锁证明 D'. 设映射 $f: S' \to S$ 如引理 7.2.2 所述，则 f 有一保归结扩张 $F: [S']_m \to [S]$ 使对每个 $E' \in [S']_m$，E' 是 $F(E')$ 的基例. F 也是保锁归结的扩张. 事实上，只要在引理 7.2.2 的证明中用到提升引理的地方改为使用引理 7.3.1 就可得到 f 的这种保锁归结的扩张 F. 把锁证明 D' 中的每个基子句 E' 用 $F(E')$ 取代就得到 S 的一个锁证明.

习 题 7.3

1. 设 S 中含有 4 个子句如下：

(1) ${}_5P \vee {}_6Q$.

(2) ${}_3P \vee {}_2\neg Q$.

(3) ${}_1\neg P \vee {}_4Q$.

(4) ${}_8\neg P \vee {}_7\neg Q$.

试写出 S 的一个锁证明来.

2. 设 S 中含有 7 个子句如下：

(1) ${}_1\neg A(x) \vee {}_3B(x) \vee {}_2Q(x, f(x))$.

(2) ${}_6\neg A(x) \vee {}_5B(x) \vee {}_4C(f(x))$.

(3) ${}_7A(a)$.

(4) ${}_8P(a)$.

(5) ${}_{10}\neg Q(a, y) \vee {}_9P(y)$.

(6) ${}_{12}\neg P(x) \vee {}_{13}\neg B(x) \vee {}_{11}\neg B(a)$.

(7) ${}_{14}\neg P(x) \vee {}_{15}\neg C(x) \vee {}_{16}\neg C(f(a))$.

试写出 S 的一个锁证明来.

3. 同第 2 题，但把(1)，(2)，(5)，(6)，(7) 各子句中的前两个文字的编号互换（如，把(1) 改为${}_3\neg A(x) \vee {}_1B(x) \vee {}_2Q(x, f(x))$ 等).

7.4　线性归结

设有子句集 $S=\{A\vee\neg B\vee D,\neg A\vee D,B,C\vee\neg D,\neg C\vee\neg D\}$. 下面的图7.4.1给出了 S 的一个归结证明. 从图7.4.1看出,这种归结有一条主线,从上到下的子句依次为

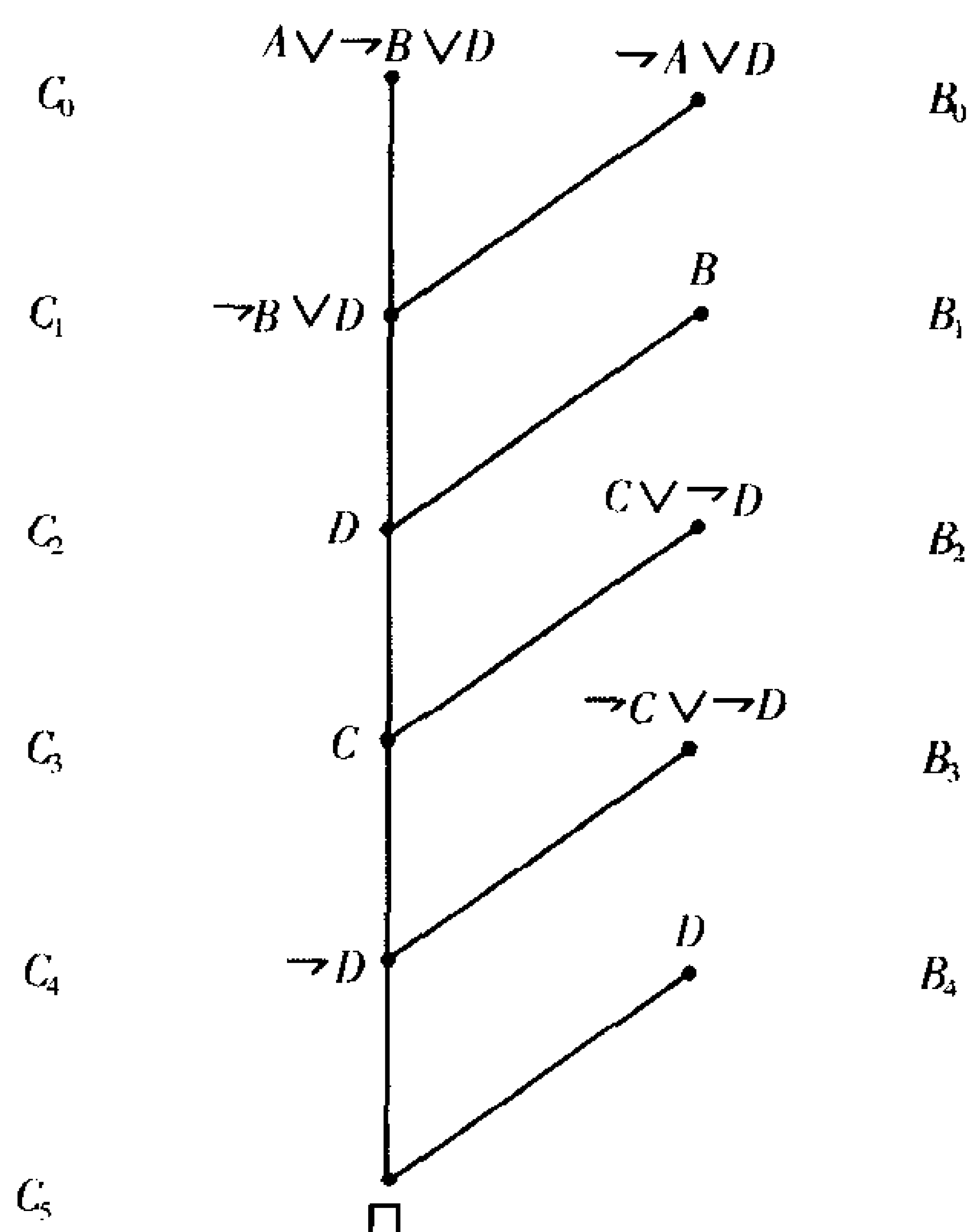


图 7.4.1

$$C_0=A\vee\neg B\vee D,C_1=\neg B\vee D,C_2=D,C_3=C,C_4=\neg D,C_5=\square.$$

又,侧面子句从上到下依次为

$$B_0=\neg A\vee D,B_1=B,B_2=C\vee\neg D,B_3=\neg C\vee\neg D,B_4=D.$$

我们称 $C_0,C_1,\cdots,C_5$ 为中心子句,C_0 叫顶点子句,$B_0,B_1,\cdots,B_4$ 为边子句. 其特点为:C_{i+1} 是 C_i 与 B_i 的归结式($i=1,\cdots,4$),且 $B_i\in S$ 或 B_i 是一个中心子句 C_j,这里 $j<i$. 事实上,C_{i+1} 是 C_i 与 B_i 的归结式是显然的,因为这正是图7.4.1所表示的归结过程所表示的. 又,B_0,B_1,B_2,B_3 都属于 S,B_4 不属于 S,但 $B_4=C_2$,这里 $2<4$.

这种归结就是本节中要介绍的线性归结,其优点在于有一条主线和一条边线,条理清楚,易于施行. 把图7.2.1～7.2.3与图7.4.1相比较,由于有PI冲撞的特殊要求,图7.2.1～7.2.3的头绪较多. 但是如果不管PI冲撞,这些图都可以改造为满足线性归结式样的图,以图7.2.1为例,它可以改为下面的图7.4.2.

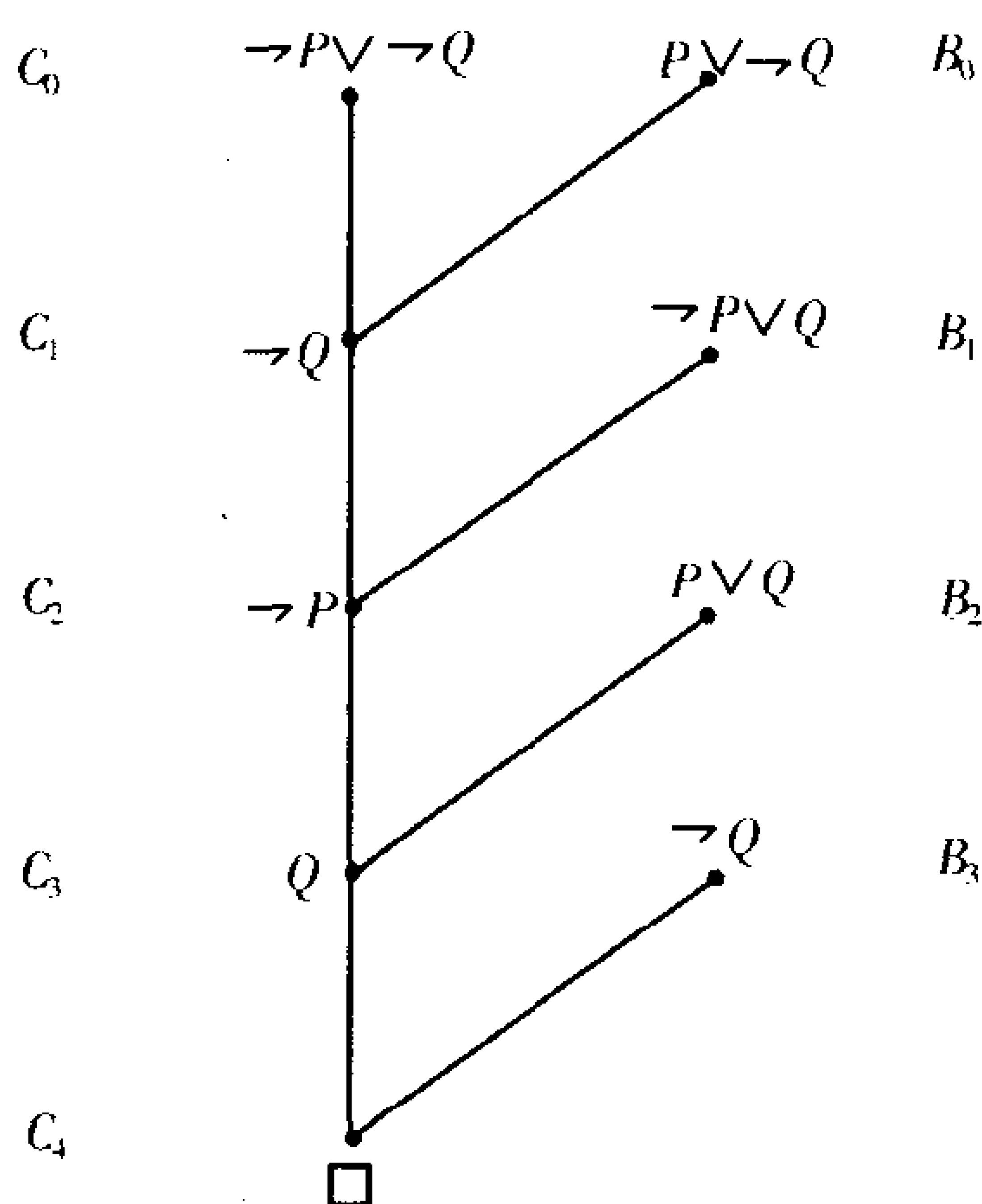


图 7.4.2

这并不是偶然的.事实上,每个表示归结证明的树如果不含变元,则都可以改造为图7.4.1的形式,换句话说,如果有限子句集 S 不可满足且不含变元,那么 S 一定有一个如图 7.4.1 那样的线性推理式的归结证明.本节的结论将走得更远,对不含变元的子句集 S,我们将证明比线性推理式的归结更特殊的所谓有序线性归结(简称为 OL 归结)都是完备的,即,只要 S 不可满足,它就有 OL 归结证明.反过来当然是明显的,只要 S 有 OL 归结证明,S 就有一个归结证明,从而 S 不可满足.

我们先给出线性推理式归结的严格定义,然后引入有序子句和有序归结等概念,最后证明对不含变元的子句集而言有序线性归结的完备性定理.

定义 7.4.1 设 S 是有限子句集,$C_0 \in S$.称 C_n 为 S 的以 C_0 为**顶点子句**的**线性推理归结式**,若以下条件成立:

(i) 存在中心子句 $C_0, C_1, \cdots, C_{n-1}$,使 C_{i+1} 是 C_i 与 B_i 的归结式($i = 1, \cdots, n-1$).

(ii) $B_0, B_1, \cdots, B_{n-1}$ 叫边子句,$B_i \in S$,或存在中心子句 C_j 使 $B_i = C_j$ 且 $j < i$.

从 S 得出 C_n 的过程叫从顶点子句 C_0 到 C_n 的**线性推理**.

如,在图 7.4.1 中,存在 S 的从顶点子句 $A \vee \neg B \vee D$ 到空子句 □ 的线性推理(也存在如从 $A \vee \neg B \vee D$ 到 $\neg D$ 的线性推理等).又,在图 7.4.2 中,存在 S 的从顶点子句 $\neg P \vee \neg Q$ 到中心的子句 C_1, C_2, C_3 和空子句 □ 的线性推理.

例 7.4.1 设 $S = \{A(a), \neg B(a,b), D(a,f(c),f(b)), D(x,x,f(x)), \neg D(x,y,z) \vee D(y,x,z), \neg D(x,y,z) \vee B(x,z), \neg A(x) \vee \neg D(y,z,u) \vee \neg B(x,u) \vee B(x,y) \vee B(x,z)\}$,则下面的图 7.4.3 给出了 S 的以 $\neg B(a,b)$ 为顶点到空子句 □ 的线性推理:

注意,图 7.4.3 是为了结合后面要讲的有序归结而设计的,它显然不够简单.比如,下面的图 7.4.4 是 S 的从顶点子句 $\neg B(a,b)$ 到空子句 □ 的另一种较简单的

线性推理.

图 7.4.3

图 7.4.4

定义 7.4.2 (i) 子句 C 叫**有序子句**,是指 C 中作为析取项的各文字有从左到右的自然顺序,越靠左的文字序号越小.

(ii) 设子句 C 中有两个或多个文字有 mgu σ,在 $C\sigma$ 中只保留序号最小的(合一了的)文字,所得子句叫 C 的**有序因子**.

(iii) 设 C_1 与 C_2 是不含相同变元的二有序子句，分别含有文字 L_1 与 L_2. 如果 L_1 与 $\neg L_2$ 有 mgu σ，按从左到右的顺序依次写出 $C_1\sigma \vee C_2\sigma$，从中删去 $L_1\sigma$ 与 $L_2\sigma$，并对在多处出现的同一文字只保留最左边的一个，称所得结果为 C_1 关于 C_2 的**有序二元归结式**.

(iv) 设 C_1 与 C_2 是二有序子句. 按以下 4 种情形所得的子句都叫 C_1 关于 C_2 的**有序归结式**:

(1) C_1 关于 C_2 的有序二元归结式.

(2) C_1 的有序因子关于 C_2 的有序二元归结式.

(3) C_1 关于 C_2 的有序因子的有序二元归结式.

(4) C_1 的有序因子关于 C_2 的有序因子的有序二元归结式.

例 7.4.2　(i) 设 $C_1 = A(x) \vee \neg B(y) \vee A(z) \vee A(u)$，规定 C_1 的 4 个文字中靠左边的文字较小，则 C_1 是一个有序子句.

(ii) 令 $\sigma = \{a/x, a/z, a/u\}$ 则 $C_1\sigma = A(a) \vee \neg B(y) \vee A(a) \vee A(a)$. 这时 $C_1' = A(a) \vee \neg B(y)$ 是 C_1 的一个有序因子.

(iii) 设 $C_2 = B(w) \vee B(b) \vee A(w)$，则 $C_2' = B(b) \vee A(b)$ 是 C_2 的一个有序因子. 设 $L_1 = \neg B(y)$，$L_2 = B(b)$，$\lambda = \{b/y\}$，则 C_1 中的 L_1 与 C'_2 中的 $\neg L_2$ 可合一，所以 $A(x) \vee A(z) \vee A(u) \vee A(b)$ 是 C_1 关于 C_2 的有序归结式. 又，C_1' 关于 C_2' 的有序二元归结式 $A(a) \vee A(b)$ 也是 C_1 关于 C_2 的有序归结式. 注意，这时 $A(b) \vee A(a)$ 是 C_2 关于 C_1 的有序归结式，它不同于 C_1 关于 C_2 的有序归结式.

(iv) 如果在(ii) 中把 σ 换为 $\mu = \{b/x, b/z, b/u\}$，则可得出 C_1 关于 C_2 的有序归结式 $A(b)$.

注 7.4.1　我们曾经说过，可以对归结方法提出种种限制，只要对不可满足的子句集而言，可以由限制后的归结方法推出空子句 □ 就行. 限制的目的在于减少头绪使计算机易于操作. 从这一意义上讲，限制越多越好. 有序归结是一种限制，在选择 C_1 关于 C_2 的归结式还是 C_2 关于 C_1 的归结式方面它已经比笼统地说求 C_1 与 C_2 的归结式减少了头绪. 有序归结主要是与 PI 归结相结合而构作所谓 OI 归结而显示其提高效率的功能的，但 OI 归结并不完备，本书不予介绍，有兴趣的读者可参看文献[12]. 以下进一步将有序归结加以改造，使其与线性归结相结合而得出关于不含变元的子句集的完备的 OL 归结方法，即有序线性归结方法来.

下面的定义与定义 7.4.2 类似，但由于有了加框文字，相应的定义要复杂一些.

定义 7.4.3　(i) 设有序子句 C 中有若干个文字(包括 0 个文字)用黑框框了起来，则称 C 为**有框子句**，被框文字叫**有框文字**，其余文字叫**无框文字**.

(ii) 设 C_1 与 C_2 是不含相同变元的二有框子句，分别含有无框文字 L_1 与 L_2 且 L_1 与 $\neg L_2$ 有 mgu σ. 设 C^* 是在 $C_1\sigma \vee C_2\sigma$ 中将 $L_1\sigma$ 用黑框框起来、删去 $L_2\sigma$ 并且

对在多处出现的相同文字只保留最左方的一个所得的有框子句. 设 C 是在 C^* 中删去右方不再有无框文字的所有有框文字所得的有框子句,称 C 为 C_1 关于 C_2 的**有序二元归结式**.

(iii) 设 C_1 与 C_2 是二有框的子句,按以下 4 种情形所得的子句都叫 C_1 关于 C_2 的有序归结式:

(1) C_1 关于 C_2 的有序二元归结式.

(2) C_1 关于 C_2 的有序因子的有序二元归结式.

(3) C_1 的有序因子关于 C_2 的有序二元归结式.

(4) C_1 的有序因子关于 C_2 的有序因子的有序二元归结式.

以上关于有框文字的有序因子的定义同定义 7.4.2(ii),但对有框文字不作合一.

例 7.4.3　(i) 设 $C_1 = A \vee B \vee \neg E, C_2 = \neg A \vee \neg E$,则 C_1 关于 C_2 的有序二元归结式为 $\boxed{A} \vee B \vee \neg E$.

(ii) $\boxed{A} \vee B \vee \neg E$ 关于 E 的有序二元归结式为 $\boxed{A} \vee B$(首先得出 $\boxed{A} \vee B \vee \boxed{\neg E}$,因为 $\boxed{\neg E}$ 右方没有无框文字,所以将 $\boxed{\neg E}$ 删去).

(iii) 设 $C_1 = \boxed{\neg B(a,b)} \vee \neg A(a) \vee \neg D(b,b,u) \vee \neg B(a,u), C_2 = D(x, x, f(x))$,则 C_1 关于 C_2 的有序二元归结式为 $\boxed{\neg B(a,b)} \vee \neg A(a) \vee \boxed{\neg D(b,b,f(b))} \vee \neg B(a,f(b))$.

(iv) 设 C_1 同(iii), $C_2 = D(x,x,f(x)) \vee D(y,y,f(y)) \vee D(b,b,f(b))$,则 C_2 有一个有序因子 $D(b,b,f(b))$. 这时 C_2 关于 C_1 的有序归结式为

$$\boxed{D(b,b,f(b))} \vee \boxed{\neg B(a,b)} \vee \neg A(a) \vee \neg B(a,f(b)).$$

定义 7.4.4　设 C 是有框子句. 如果 C 中的末位文字是无框文字,且与 C 中某有框文字的否定可经 σ 而合一,则称 C 为**可约简子句**. 这时从 $C\sigma$ 中删去末位文字以及右方不再有无框文字的有框文字,称所得有框子句为 C 的**约简**.

例 7.4.4　设 $C = A(x) \vee \boxed{Q(x,y)} \vee B(y) \vee \boxed{\neg E(u)} \vee \boxed{D(u)} \vee \neg Q(a, b)$,则因为 C 的末位文字 $\neg Q(a,b)$ 与 C 中的有框文字 $Q(x,y)$ 的否定式 $\neg Q(x,y)$ 可经 $\lambda = \{a/x, b/y\}$ 而合一,所以 C 是可约简子句. 从 $C\lambda = A(a) \vee \boxed{Q(a,b)} \vee B(b) \vee \boxed{\neg E(u)} \vee \boxed{D(u)} \vee \neg Q(a,b)$ 中删去末位文字 $\neg Q(a,b)$ 以及最后的两个有框文字得 $C' = A(a) \vee \boxed{Q(a,b)} \vee B(b)$. C' 就是 C 的约简.

定义 7.4.5　设 S 是有限的有序子句集, $C_0 \in S$. 称 C_n 为 S 的以 C_0 为顶点子句的线性推理归结式,若以下条件成立:

(i) 存在中心(有框)子句 $C_0, C_1, \cdots, C_{n-1}$ 和边(有框)子句 $B_0, B_1, \cdots, B_{n-1}$ 使得

(1) 当 C_i 可约简时 C_{i+1} 是 C_i 的约简.

(2) 当 C_i 不可约简时 $B_i \in S$,且 C_{i+1} 是 C_i 关于 B_i 的有序归结式,且被消去文字是 C_i 的末位文字.

(3) 若 $B_i \notin S$,则有 $C_j(j < i)$ 使 B_i 是 C_j 的例.

(ii) 推理中不出现逻辑有效公式.

上述推理叫**有序线性归结**或简称为 **OL 归结**. 从 S 出发经 OL 归结推出空子句□的过程叫 S 的 **OL 证明.**

例 7.4.5　重新考虑例 7.4.1,将图 7.4.3 加框后即得如图 7.4.5 的 S 的 OL 证明图. 请读者仔细验证图 7.4.5 满足定义 7.4.5 的全部要求.

$\neg B(a,b)$　$\neg A(x) \vee \neg D(y,z,u) \vee \neg B(x,u) \vee B(x,y) \vee B(x,z)$

$\boxed{\neg B(a,b)} \vee \neg A(a) \vee \neg D(y,b,u) \vee \neg B(a,u) \vee B(a,y)$　$\neg B(a,b)$

$\boxed{\neg B(a,b)} \vee \neg A(a) \vee \neg D(b,b,u) \vee \neg B(a,u)$　$\neg D(x,y,z) \vee B(x,z)$

$\boxed{\neg B(a,b)} \vee \neg A(a) \vee \neg D(b,b,u) \vee \neg D(a,y,u)$　$D(a,f(c),f(b))$

$\boxed{\neg B(a,b)} \vee \neg A(a) \vee \neg D(b,b,f(b))$　$D(x,x,f(x))$

$\boxed{\neg B(a,b)} \vee \neg A(a)$　$A(a)$

□

图 7.4.5

注 7.4.2　OL 证明效率很高,这是因为

(i) 按定义 7.4.5(i)(2) 中的要求,当作 C_i 关于 B_i 的有序归结时,C_i 中的被消文字应为末位文字,这样很容易在 S 中找出能与 C_i 作归结的子句来.

(ii) 按定义 7.4.5(ii),推理不出现逻辑有效公式,那么遇到像 $\neg P \vee Q \vee R$ 与 $P \vee \neg Q$ 这样的子句对,由于 $\neg P$ 与 P 以及 Q 与 $\neg Q$ 都互补,就不作归结,因为否则会得出逻辑有效的子句 $\boxed{\neg P} \vee Q \vee R \vee \neg Q$ 或 $\neg P \vee \boxed{Q} \vee R \vee P$ 来.

(iii) 最重要的一点在于:若中心子句 C_i 不可约简,则只考虑它关于 **S 中的边子句**的有序归结,而当 C_i 可以约简时,与之配对的边子句 B_i 则无关紧要,因为这时即

使不作 C_i 关于 B_i 的有序归结也能通过将 C_i 约简而得出下一个中心子句 C_{i+1} 来. 换句话说,定义 7.4.5(i)(3) 中关于 B_i 的描述可以略去. 这样,每作一次归结就用到 S 中的一个子句. 如果每个边子句都取自 S,则所得线性结归叫**输入归结**. 输入归结显然效率很高,因为若 S 中含有 n 个子句,每次都以这些子句作为边子句很快就可归结出空子句 □ 来. 由以上分析可见,OL 归结只比输入归结多作了一些约简,因而效率也是很高的. 注意,约简是针对有框子句而设的,由此也可见加框方法的用处之一斑.

注 7.4.3 前面我们不止一次地说过,OL 归结关于**不含变元的子句集**而言是完备的,但对含变元的情形 OL 归结不再是完备的了,文献[15] 首先于 1981 年指出了这一点,这也纠正了文献[12] 以为 OL 归结是完备的这一错误. 文献[15] 中指出,定义 7.4.5 有一个不妥之处,即,当 C_i 可约简时要求 C_{i+1} 一定是 C_i 的约简,而不是 C_i 与 S 中某有序子句的有序归结(我们也在注 7.4.2(iii) 中指出了 OL 的原始定义 7.4.5[12] 中的条件(i)(3) 是多余的). 文献[15] 针对这一缺陷提出了完备的 MOL 归结方法. 顺便指出,输入归结也是不完备的,但它仍被经常用来对子句集 S 的不可满足性作尝试性的证明,而且往往很有效. 对于 OL 归结也是一样,虽然完备性定理不成立,这种方法也经常被使用. 这正是我们保留例 7.4.5 的原因所在.

命题 7.4.1(不含变元的 OL 归结的完备性定理) 设 S 是不可满足的有限的基子句集,$C \in S$,$S-\{C\}$ 可满足,则 S 有一个以 C 为顶点子句的 OL 证明.

证明 以 A 表示 S 中的基原子之集. 若 $|A|=1$,则 A 中只有一个基原子 Q,这时 $C=Q$ 或 $C=\neg Q$ 且 $\{Q,\neg Q\}\subset S$,所以 C 关于 $\neg C$ 的有序归结式为 □. 即,命题当 $|A|=1$ 时成立. 现在设当 $|A|\leqslant n$ 时命题成立,今 $|A|=n+1$.

(i) 设 $C=L$ 为单文字.

从 S 中删去含有 L 的子句,并从含有 $\neg L$ 的子句中删去 $\neg L$,以 S' 记所得子句之集. 这时 S' 中的基原子的个数不超过 n(因为 L 与 $\neg L$ 均不再出现). 易证明 S' 仍不可满足. 以 T' 表示 S' 的不可满足的极小子集,则 T' 的任一真子集都是可满足的. 这时 T' 必含有一个子句 E',E' 是从 S 的子句 E 中删去了 $\neg L$ 而得到的,因为反之 T' 的每个子句都属于 $S-\{C\}$,就会由 $S-\{C\}$ 可满足推出 T' 可满足的矛盾. 因为 T' 中基原子的个数不超过 S' 中基原子的个数,即,不超过 n,所以由归纳假设知 T' 有一个以 E' 为顶点子句的 OL 证明 D',如图 7.4.6 所示.

现在对图 7.4.6 的 OL 证明进行改造:把 C_i' 改为 $\boxed{L}\vee C_i'(\vee\neg L)(i=1,\cdots,n-1)$,把 B_i' 改为 $B_i'(\vee\neg L)(i=0,1,\cdots,n-1)$,把 E' 改为 $\boxed{L}\vee E'$,并且在上面增添新的顶点子句 $L=C$ 以及边子句 E,则图 7.4.7 表示 S 的以 C 为顶点子句的到 □ 或到 $\neg L$ 的 OL 推理. 以下对形如 $\boxed{L}\vee G'(\vee\neg L)$ 和形如 $G'(\vee\neg L)$ 的子句作一解释. 设 G' 是 T' 中的任一子句,则 S 中有子句 G 使 $G'=G$ 或 G' 是从 G 中

删去了 $\neg L$ 而得的子句. 在两种情形下都称 G 为 G' 的**原子句**,即 $G'(\vee \neg L) = G$. 这时$\boxed{L} \vee G'(\vee \neg L)$ 和 $G'(\vee \neg L)$ 分别是$\boxed{L} \vee G'$ 和 G' 的原子句$\boxed{L} \vee G$ 和 G. 设 $G', H' \in T'$, G' 关于 H' 可作有序归结而得 K' 且被消去文字是 G' 的末位文字. 分别用 G 与 H 表示 G' 与 H' 的原子句. 如果 G 不以 $\neg L$ 为末位文字,则 G 关于 H 可作有序归结而得 K' 的原子句 K, $\boxed{L} \vee G$ 也可关于 $H = H'(\vee \neg L)$ 作有序归结而得$\boxed{L} \vee K = \boxed{L} \vee K'(\vee \neg L)$. 如果 G 以 $\neg L$ 为末位文字,则因 T' 中每个子句及其原子句都不含文字 L, G 的末位文字 $\neg L$ 不能消去. 但这时$\boxed{L} \vee G = \boxed{L} \vee G' \vee \neg L$ 可约简为$\boxed{L} \vee G'$,仍可关于 $H = H'(\vee \neg L)$ 作有序归结而得$\boxed{L} \vee K'(\vee \neg L)$. 由此可知图 7.4.7 是 S 的以 $C = L$ 为顶点子句到空子句 □ 的 OL 证明.

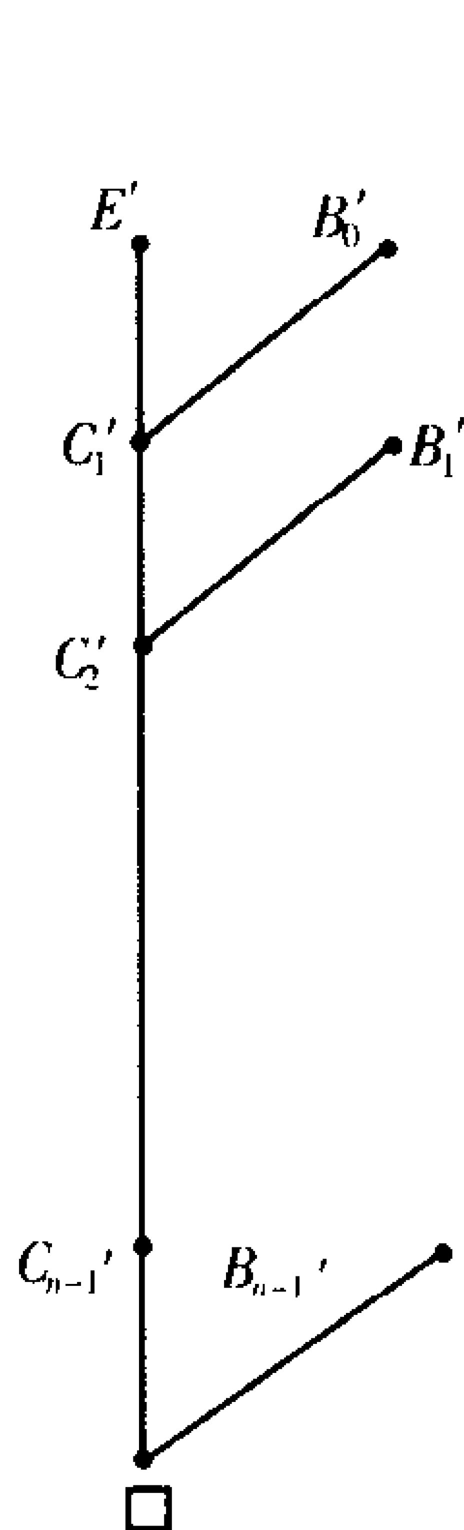


图 7.4.6

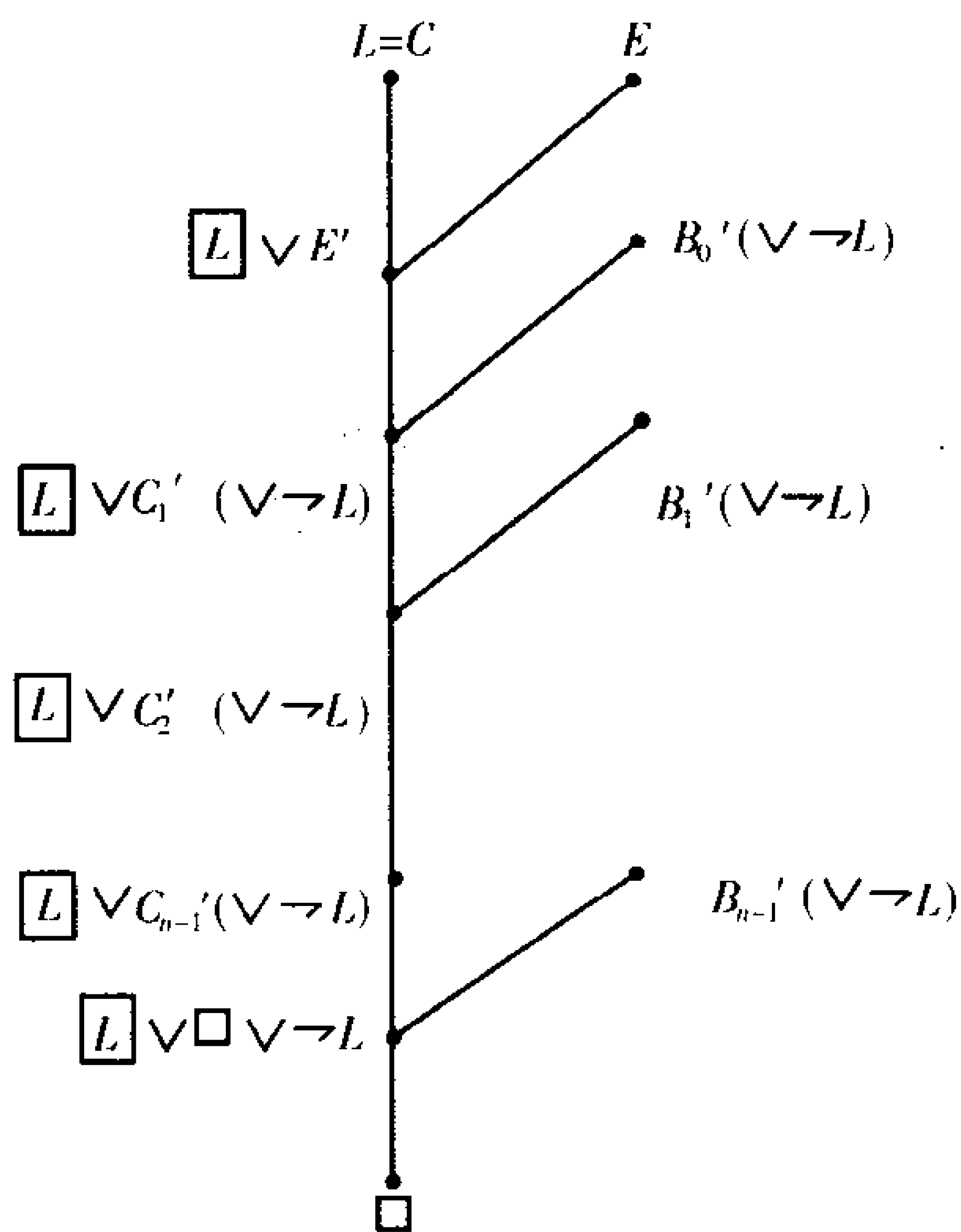


图 7.4.7

(ii) 设 C 不是单文字.

设 L 是 C 的最左的文字,把 C 写为 $L \vee C'$,这里 C' 是非空的有序子句. 从 S 中删去含有 $\neg L$ 的子句,并从含有 L 的子句中删去 L 得一子句集 S'. 容易证明 S' 是不可满足的. 又,由 $S - \{C\}$ 可满足知它有模型 I,且由 S 不可满足知 $I \models L$ 不成立. 设 $G' \in S' - \{C'\}$,则由 $I \models G'(\vee L)$ 和 $I \models L$ 不成立知 $I \models G'$. 所以 $S' - \{C'\}$ 可满足. 因为 S' 含有不多于 n 个基原子,由归纳假设知 S' 有以 C' 为顶点子句到空子句 □ 的 OL 证明 D'. 把 L 补回到每一当初曾删去它的子句的原来位置上,则可得一 S 的以 C 为顶点子句到 L 的 OL 推理 D_1. 又,子句集 $\{L\} \cup (S - \{C\})$ 不可满足(因为反之,则由 $C = L \vee C'$ 将得出 $\{C\} \cup (S - \{C\}) = S$ 可满足的矛盾),且 $S - \{C\}$ 可

满足，所以由情形(i) 的证明知$\{L\}\cup(S-\{C\})$有一个以L为顶点子句到空子句□的 OL 证明D_2. 把D_1置于D_2之上就得到S的以C为顶点子句到空子句的 OL 证明.

注 7.4.4 (i) 命题 7.4.1 中对完备性的表述只讲了必要性的一面，因为充分性是归结原理完备性中充分性的特例，无须表述.

(ii) 设S不可满足，则S含有一个极小的不可满足的子集. 事实上，任意删去S的一个子句C_1，若$S-\{C_1\}$可满足，则S就符合命题 7.4.1 中的条件. 反之再从$S-\{C_1\}$中任意删去一个子句C_2，若$S-\{C_1,C_2\}$可满足，就以$S-\{C_1\}$作为命题中的S，以此类推可得S的不可满足的且符合命题 7.4、1 要求的子集来.

(iii) 本章介绍的各种归结方法中有一些是彼此相容的，即，可以混合使用而仍保持完备性，有一些则不能混合使用. 关于这方面的进一步知识可参阅文献[12]、[15] 等.

习　题　7.4

1. 设$S=\{A\vee B,B\vee C,\neg A\vee\neg C,C\vee D,\neg B\vee\neg D,\neg B\vee\neg C\}$. 试写出$S$的：

(i) 以$A\vee B$为顶点子句的线性归结证明.

(ii) 以$\neg B\vee\neg D$为顶点子句的线性归结证明.

2. 设S由以下子句组成：

$A\vee B\vee C$

$A\vee B\vee\neg C$

$A\vee\neg B\vee C$

$A\vee\neg B\vee\neg C$

$\neg A\vee B\vee C$

$\neg A\vee B\vee\neg C$

$\neg A\vee\neg B\vee C$

$\neg A\vee\neg B\vee\neg C$

(i) 试证以上任意 7 个子句之集都是可满足的.

(ii) 写出S的以$A\vee B\vee C$为顶点子句且按上面的顺序将其余子句从上到下依次作为边子句的 OL 证明.

(iii) 写出S的以$\neg A\vee\neg B\vee\neg C$为顶点子句且按与上面相反的顺序将其余子句从下到上作为边子句的 OL 证明.

3[15]. 设$S=\{Q(b),\neg Q(b)\vee P(x)\vee\neg Q(x),Q(a),\neg P(a)\}$.

(i) 试证S不可满足，且$S-\{Q(b)\}$可满足.

(ii) 试证S没有 OL 证明.

第 8 章 多值逻辑演算理论

8.1 引　　言

在实际生活中，任一给定的命题要么为真，要么为假，二者必居其一，且仅居其一. 如果用 1 表示真，用 0 表示假，则对任一具体的命题 P 而言，其真值或为 1，或为 0. 在命题演算理论中，设 p 为原子公式，则 p 表示简单命题. 由于 p 可以表示种种不同的实际命题，所以 p 的真值不能确定，但有一点是肯定的，即 p 的真值非 1 即 0. 对于命题演算中的一般公式 A 而言，A 由原子公式经逻辑连接词连接而成，它可以用来表示复合命题，比如 A 为 $\neg p_1 \to p_2$. 这时 A 的真值也是不确定的，因为 A 可以表示种种不同的实际命题. 但也有一点是肯定的，即，A 的真值非 1 即 0，这要看 p_1 与 p_2 的真值如何而定了. 当然，有少数公式，比如 $A = p_1 \to p_1$，无论组成它的原子公式 p_1 取真值 1 还是取真值 0，A 的真值恒为 1. 这类公式就是前面讲过的重言式. 另一类是恒取真值 0 的矛盾式，如 $\neg(p_1 \to p_1)$ 等. 只是对大多数一般公式而言，其真值不确定，不过只能在 1 和 0 这两个值中选择.

在一阶谓词演算系统 $\mathscr{L}$ 中，当 $\mathscr{L}$ 的解释 I 以及变元的赋值确定后，任一公式 A 要么为真，要么为假，二者必居其一，且仅居其一. 也就是说，在谓词演算系统中，无论对何种解释，一个公式的真值也只能在 1 与 0 中去选择. 正因如此，本书中迄今为止所讲述的逻辑理论属于**二值逻辑**. 二值逻辑以其形式化推理的严谨性而著称，也是现代计算机科学的理论基础.

另一方面，在现实生活中的确存在着一类命题，其真值不能用 1 或 0 去描述. 比如，考虑如下的：

命题 8.1.1　明年 12 月 21 日中午我将在华沙.

由于这一命题涉及**未来**事件，所以我们既不能说它真，也不能说它假. Łukasiewicz 就用 $\frac{1}{2}$ 表示它的真值[19]. 再如，考虑如下的

命题 8.1.2　人的寿命一般都不超过 90 岁.

由于这一命题中含有意义不确切的修饰词“一般”，所以我们也无法断定其真伪. 如果“一般”指 50% 的人，则以当前的统计结果看，命题 8.1.2 为真，而如果“一般”指 99.9% 的人，则命题 8.1.2 就为假了. 可见我们不能用 1 与 0 两个真值去判定命题 8.1.2 的真实程度. 由此也可见二值逻辑一方面有重要应用，另一方面也有其局限之处. 本章中就来研究真值域中含有 1 和 0 以外的值的多值逻辑理论. 把真

值域从{0,1}扩充为单位区间[0,1]时的逻辑理论也称为**Fuzzy逻辑**. Fuzzy逻辑理论所提供的Fuzzy推理方法在Fuzzy控制中有重要应用,本章就来研究这种真值域为[0,1]的多值逻辑理论. 本章的内容是这样安排的:

第一,逻辑演算是多值逻辑理论的重要组成部分,有与二值逻辑的演算理论颇多相似之处. 本章中将较系统地研究两种多值逻辑演算理论,即Łukasiewicz逻辑系统与作者提出的R_0系统$\mathscr{L}^*$中的逻辑演算理论. 但只限于命题演算,不涉及谓词演算理论.

第二,Boole代数与二值逻辑有紧密的联系. 在语构理论中,公式的可证等价关系是同余关系,全体公式之集关于这个同余关系作商即可得到Boole代数. 完全类似地,在Łukasiewicz系统中上述的商为MV代数,在系统$\mathscr{L}^*$中,上述的商为R_0代数. 所以我们分别在讲Łukasiewicz系统与$\mathscr{L}^*$系统之前研究MV代数和R_0代数理论.

第三,如前所述,本章中取真值域为单位区间[0,1]. 给[0,1]赋予适当的运算后就可使[0,1]成为MV代数,赋予另外的运算后[0,1]又可成为R_0代数. 我们就分别用MV单位区间与R_0单位区间作为"打分表"展开两种多值逻辑的语义理论. 从一定意义上讲,MV单位区间是最简单的MV代数,R_0单位区间是最简单的R_0代数,正像{0,1}是最简单的Boole代数一样. 可见本章中选用[0,1]作为"打分表"的作法是与前面基于{0,1}展开语义理论的作法是一致的. 由于[0,1]上的蕴涵算子在逻辑语义理论中占有重要地位,所以我们在论述语义理论前先安排了8.2节作为预备.

第四,语义与语构相和谐的标志是完备性定理成立,我们将证明Łukasiewicz系统和系统$\mathscr{L}^*$都是完备的. 由于前者已有不少讨论[11,26],而后者则是新结果①,关于Łukasiewicz系统的基于MV代数的完备性证明的某些细节则请读者参看[11].

第五,正像每个Boole代数都同构于若干最简Boole代数{0,1}的乘积的子代数一样,MV代数与R_0代数也分别同构于若干全序MV代数与全序R_0代数的乘积的子代数. 我们将以R_0代数为例证明系统$\mathscr{L}^*$的完备性. 读者将此与二值情形相对照有利于对本章内容的理解.

8.2　正则蕴涵算子

在建立多值逻辑的语义理论时,不同的系统涉及不同的蕴涵算子②. 其中有一类蕴涵算子比较重要,即,可与[0,1]上的某种三角模构成伴随对的蕴涵算子. 我们在本节中就来研究这一类蕴涵算子.

---

① 裴道武,王国俊. 逻辑系统$\mathscr{L}^*$的完备性. 中国科学(E辑),2002,32(1):55～64.

② Mingsheng Ying. Implication operators in fuzzy logic. IEEE Trans. Fuzzy Systems. 2002(10),1:88～91.

定义 8.2.1　设 $\otimes:[0,1]^2 \to [0,1]$ 是二元函数，如果当 $a,b,c \in [0,1]$ 时

(i) $a \otimes b = b \otimes a$.

(ii) $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$.

(iii) $a \otimes 1 = a$.

(iv) 若 $b \leqslant c$，则 $a \otimes b \leqslant a \otimes c$.

则称 $\otimes$ 为$[0,1]$上的**三角模**，简称 ***t*- 模**.

也可以这样说，$\otimes$ 是$[0,1]$上的三角模当且仅当$([0,1],\otimes)$是带单位 1 的交换半群，并且对每个 $a \in [0,1]$，$f_a(x) = a \otimes x$ 是增函数. 又，如果把上面的条件(iii) 改为

(iii)$'$ $a \otimes 0 = a$.

则称 $\otimes$ 为$[0,1]$上的**三角余模**，简称 ***s*- 模**. 本文只研究今后要用的三角模.

例 8.2.1　按以下方式给出的二元算子 $\otimes$ 都是三角模：当 $a,b \in [0,1]$ 时

(i) $a \otimes b = (a + b - 1) \vee 0.$　　(8.2.1)

(ii) $a \otimes b = a \wedge b.$　　(8.2.2)

(iii) $a \otimes b = ab.$　　(8.2.3)

(iv) $$a \otimes b = \begin{cases} a \wedge b, & a + b > 1, \\ 0, & a + b \leqslant 1. \end{cases} \tag{8.2.4}$$

这里的式(8.2.4) 即文献[19] 中的圈乘算子. 事实上，由(ii) 与(iii) 定义的 $\otimes$ 显然是三角模. 可以证明由(i) 与(iv) 定义的 $\otimes$ 也是三角模. 以(iv) 为例进行证明. 式(8.2.4) 中的 $\otimes$ 满足定义 8.2.1 中的条件(i)，(iii) 和(iv) 比较明显，以下只证 $\otimes$ 满足条件(ii).

(1) 设 $a + b > 1, b + c > 1, a + c > 1$，则$(a \wedge b) + c > 1$. 所以

$$\begin{aligned}(a \otimes b) \otimes c &= (a \wedge b) \otimes c = (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) \\ &= a \wedge (b \otimes c) = a \otimes (b \otimes c).\end{aligned}$$

(2) 设上面三个不等式之一不成立，比如，设 $a + b \leqslant 1$，则由式(8.2.4) 得

$$(a \otimes b) \otimes c = 0 \otimes c = 0.$$

又，由 $a + (b \otimes c) \leqslant a + b \leqslant 1$ 和式(8.2.4) 得 $a \otimes (b \otimes c) = 0$. 所以仍有

$$(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c).$$

本例中的三角模都是常用的三角模，从(i) 到(iv) 依次称为 Łukasiewicz 三角模、Gödel 三角模、乘积三角模和 R_0 三角模，并分别把它们记为 $\otimes_L$、$\otimes_G$、$\otimes_\pi$ 和 $\otimes_0$. 容易看出，任意固定一个 $a \in [0,1]$，并令 $f_a:[0,1] \to [0,1]$ 由 $f_a(x) = a \otimes x$ 定义，则对前三个三角模而言，$f_a(x)$ 都是连续的. 但对 R_0 三角模而言，若 $a \neq 0, a \neq 1$，则 $f_a(x)$ 不连续，它只是左连续的.

定义 8.2.2　三角模 $\otimes$ 叫**左连续**的，如果对每个 $a \in [0,1]$，

$$f_a(\bigvee_{i \in I} b_i) = \bigvee_{i \in I} f_a(b_i), \tag{8.2.5}$$

这里

$$f_a(x) = a \otimes x. \tag{8.2.6}$$

注 8.2.1　f_a 满足条件(8.2.5)也可简单地说成是"f_a 保并". 容易证明对于增函数 f 而言,f 保并和分析学中所说的 f 左连续是等价的,即,若 $f:[0,1]\to[0,1]$ 是增函数,则对任一 $b\in(0,1]$,

$$\lim_{x\to b} f(x) = f(b) \text{ 当且仅当 } f(\vee\{x \mid x<b\}) = \vee\{f(x)\mid x<b\}. \tag{8.2.7}$$

左连续的三角模与建立一类多值逻辑有关,Esteva F. 与 Godo L. 对此有详细的讨论[①],他们提出的弱幂零取小算子 $\otimes$ 是文献[19]中圈乘算子的推广.

例 8.2.2　三角模 $\otimes_0$ 是左连续的. 事实上,设 $a\in[0,1]$,$b=\bigvee_{i\in I} b_i(b_i\in[0,1],i\in I)$,以下证明 f_a 保并. 因为 $f_0(x)\equiv 0$,$f_1(x)=x(x\in[0,1])$,所以不妨设 $a\in(0,1)$. 这时若 $a+b>1$,则有 $i_0\in I$ 使 $a+b_{i_0}>1$. 注意 $b=\bigvee_{i\in I} b_i=\vee\{b_i \mid b_i\geqslant b_{i_0}, i\in I\}$,则由式(8.2.4)和 f_a 递增得

$$\begin{aligned} f_a(\bigvee_{i\in I} b_i) &= a\otimes(\bigvee_{i\in I} b_i) = a\wedge(\bigvee_{i\in I} b_i) = a\wedge(\vee\{b_i\mid b_i\geqslant b_{i_0}, i\in I\}) \\ &= \vee\{a\wedge b_i \mid b_i\geqslant b_{i_0}, i\in I\} = \vee\{a\otimes b_i\mid b_i\geqslant b_{i_0}, i\in I\} \\ &= \vee\{f_a(b_i)\mid b_i\geqslant b_{i_0}, i\in I\} = \bigvee_{i\in I} f_a(b_i). \end{aligned}$$

又,若 $a+b\leqslant 1$,则对每个 $i\in I$ 均有 $a+b_i\leqslant 1$,所以由式(8.2.4)仍有

$$f_a(\bigvee_{i\in I} b_i) = 0 = \bigvee_{i\in I} f_a(b_i).$$

这就证明了三角模 $\otimes_0$ 是左连续的.

定义 8.2.3　设 $\otimes$ 是$[0,1]$上的 t-模,$R:[0,1]^2\to[0,1]$ 是$[0,1]$上的二元函数. 若

$$a\otimes b\leqslant c \quad \text{当且仅当} \quad a\leqslant R(b,c),\quad a,b,c\in[0,1], \tag{8.2.8}$$

则称 R 为**与 $\otimes$ 相伴随的蕴涵算子**. 称$(\otimes,R)$为**伴随对**.

以下 $R(a,b)$ 也常记为 $a\to b$.

注 8.2.2　蕴涵算子还有更一般的定义,比如由 $R_K(a,b)=(1-a)\vee b$ 定义的 Kleene 算子和由 $R_Z(a,b)=(1-a)\vee(a\wedge b)$ 定义的 Zadeh 算子等等,R_K 与 R_Z 都没有相应的三角模与之相伴随. 但能与某 t-模构成伴随对的蕴涵算子才在多值逻辑中有重要应用,本书只考虑这一类蕴涵算子.

例 8.2.3　以下 4 个蕴涵算子 R_L,R_G,R_π 和 R_0 分别与 $\otimes_L$,$\otimes_G$,$\otimes_\pi$ 和 $\otimes_0$ 构成伴随对:设 $a,b\in[0,1]$,

(i) $R_L(a,b)=(1-a+b)\wedge 1.$　　(8.2.9)

---

① Esteva F, Godo L. Monoidal t-norm based logic: towards a logic for left-continuous t-norms. Fuzzy Sets and Systems, 124(2001):271 ~ 288.

(ii) $R_G(a,b) = \begin{cases} 1, & a \leqslant b, \\ b, & a > b. \end{cases}$ (8.2.10)

(iii) $R_\pi(a,b) = \begin{cases} 1, & a = 0, \\ \dfrac{b}{a} \wedge 1, & a > 0. \end{cases}$ (8.2.11)

(iv) $R_0(a,b) = \begin{cases} 1, & a \leqslant b, \\ (1-a) \vee b, & a > b. \end{cases}$ (8.2.12)

我们以(i) 和(iv) 为例进行验证,(ii) 和(iii) 的验证留给读者.

先看 Łukasiewicz 蕴涵算子. 为简便计,以下用 $a \to b$ 表示 $R_L(a,b)$,用 $\otimes$ 表示 $\otimes_L$. 设 $a \otimes b \leqslant c$,则 $(a+b-1) \vee 0 \leqslant c$,所以 $a+b-1 \leqslant c$. 由此得 $a \leqslant 1-b+c$. 由于 $a,b,c \in [0,1]$,自然有 $a \leqslant (1-b+c) \wedge 1 = b \to c$. 反过来,设 $a \leqslant b \to c$,则 $a \leqslant 1-b+c$,所以 $(a+b-1) \vee 0 \leqslant c$,即 $a \otimes b \leqslant c$. 这就证明了$(\otimes_L, R_L)$ 是伴随对.

现在看 R_0 蕴涵算子. 用 $\otimes$ 表示 $\otimes_0$,用 $a \to b$ 表示 $R_0(a,b)$. 设 $a \otimes b \leqslant c$,应证明 $a \leqslant b \to c$. 由式(8.2.12) 知当 $b \leqslant c$ 时 $b \to c = 1$,$a \leqslant b \to c$ 自然成立,所以可设 $b > c$,从而 $b \to c = (1-b) \vee c$. 如果 $a+b > 1$,则由 $a \otimes b \leqslant c$ 和式(8.2.4) 知 $a \wedge b \leqslant c$,再由 $b > c$ 得 $a \leqslant c$,所以 $a \leqslant b \to c$. 如果 $a+b \leqslant 1$,仍有 $a \leqslant 1-b \leqslant b \to c$. 反过来,设 $a \leqslant b \to c$. 如果 $b \leqslant c$,则 $a \otimes b \leqslant a \otimes c \leqslant 1 \otimes c = c$. 如果 $b > c$,则由 $a \leqslant (1-b) \vee c$ 知 $a \leqslant 1-b$ 从而由 $a+b \leqslant 1$ 知 $a \otimes b = 0 \leqslant c$,或 $a \leqslant c$,从而 $a \otimes b \leqslant a \otimes 1 = a \leqslant c$. 所以$(\otimes_0, R_0)$ 是伴随对.

如果 t-模 $\otimes$ 具有左连续性,则与之伴随的蕴涵算子可由 $\otimes$ 导出,且具有较好的性质.

命题8.2.1　设 $\otimes$ 是$[0,1]$上的左连续三角模,在$[0,1]$上定义二元运算 $\to$ 如下:

$$b \to c = \vee \{x \mid x \otimes b \leqslant c\}, \quad x,b,c \in [0,1], \tag{8.2.13}$$

则

(i) $\to$ 是与 $\otimes$ 相伴随的蕴涵算子,即

$$a \otimes b \leqslant c \quad 当且仅当 \quad a \leqslant b \to c. \tag{8.2.14}$$

(ii) $b \to c = 1$　当且仅当　$b \leqslant c$.

(iii) $a \leqslant b \to c$　当且仅当　$b \leqslant a \to c$.

(iv) $a \to (b \to c) = b \to (a \to c)$.

(v) $1 \to c = c$.

(vi) $b \to \bigwedge_{i \in I} c_i = \bigwedge_{i \in I} (b \to c_i)$,$(\bigvee_{i \in I} b_i) \to c = \bigwedge_{i \in I} (b_i \to c)$.

(vii) $b \to c$ 关于 c 单调递增,关于 b 单调递减.

证明　(i) 设 $a \otimes b \leqslant c$,则由式(8.2.13) 立即得出 $a \leqslant b \to c$. 反之,设 $a \leqslant b$

$\to c = \bigvee \{x \mid x \otimes b \leqslant c\}$，则由 $\otimes$ 的单调性以及左连续性得

$$a \otimes b = b \otimes a \leqslant b \otimes (b \to c) = \bigvee \{b \otimes x \mid x \otimes b \leqslant c\} \leqslant c.$$

(ii) 设 $b \to c = 1$，则 $1 \leqslant b \to c$，从而由(i) 得 $b = 1 \otimes b \leqslant c$. 反之，设 $b \leqslant c$，即 $1 \otimes b \leqslant c$，所以由(i) 得 $1 \leqslant b \to c$，从而 $b \to c = 1$.

(iii) 由式(8.2.14) 得 $a \leqslant b \to c$ 当且仅当 $a \otimes b \leqslant c$ 当且仅当 $b \otimes a \leqslant c$ 当且仅当 $b \leqslant a \to c$. 所以(iii) 成立.

(iv) 设 $e \leqslant a \to (b \to c)$，则 $e \otimes a \leqslant b \to c$，从而 $(e \otimes a) \otimes b \leqslant c$. 由 $\otimes$ 的交换性和结合性知 $(e \otimes b) \otimes a \leqslant c$. 所以 $e \otimes b \leqslant a \to c$，$e \leqslant b \to (a \to c)$. 又，以上推理是可逆的. 且 e 可取为 $a \to (b \to c)$ 或 $b \to (a \to c)$，所以 $a \to (b \to c) = b \to (a \to c)$.

(v) $1 \to c = \bigvee \{x \mid x \otimes 1 \leqslant c\} = \bigvee \{x \mid x \leqslant c\} = c$.

(vi) 由 $(\otimes, \to)$ 是伴随对知

$$\begin{aligned} a \leqslant b \to \bigwedge_{i \in I} c_i \quad &\text{当且仅当} \quad a \otimes b \leqslant \bigwedge_{i \in I} c_i \\ &\text{当且仅当} \quad \forall i \in I, a \otimes b \leqslant c_i \\ &\text{当且仅当} \quad \forall i \in I, a \leqslant b \to c_i \\ &\text{当且仅当} \quad a \leqslant \bigwedge_{i \in I} (b \to c_i). \end{aligned}$$

所以 $b \to \bigwedge_{i \in I} c_i = \bigwedge_{i \in I} (b \to c_i)$. 又，由 $\otimes$ 左连续得

$$\begin{aligned} a \leqslant (\bigvee_{i \in I} b_i) \to c \quad &\text{当且仅当} \quad a \otimes \bigvee_{i \in I} b_i \leqslant c \\ &\text{当且仅当} \quad \bigvee_{i \in I} (a \otimes b_i) \leqslant c \\ &\text{当且仅当} \quad \forall i \in I, a \otimes b_i \leqslant c \\ &\text{当且仅当} \quad \forall i \in I, a \leqslant b_i \to c \\ &\text{当且仅当} \quad a \leqslant \bigwedge_{i \in I} (b_i \to c). \end{aligned}$$

所以 $(\bigvee_{i \in I} b_i) \to c = \bigwedge_{i \in I} (b_i \to c)$.

(vii) 设 $c_1 \leqslant c_2$，则 $c_1 = c_1 \wedge c_2$，所以由(vi) 得

$$b \to c_1 = b \to c_1 \wedge c_2 = (b \to c_1) \wedge (b \to c_2).$$

由此可知 $b \to c_1 \leqslant b \to c_2$. 又，设 $b_1 \leqslant b_2$，则 $b_2 = b_1 \vee b_2$，所以由(vi) 得

$$b_2 \to c = b_1 \vee b_2 \to c = (b_1 \to c) \wedge (b_2 \to c).$$

由此可知 $b_2 \to c \leqslant b_1 \to c$.

注 8.2.3　(i) 为证 $a = b$，可证 $x \leqslant a$ 当且仅当 $x \leqslant b$. 事实上，若 $x \leqslant a$ 当且仅当 $x \leqslant b$，则由取 x 为 a 时 $a \leqslant a$ 成立就得出 $a \leqslant b$. 同理由 $b \leqslant b$ 可得 $b \leqslant a$. 所以 $a = b$. 以上在证明命题 8.2.1 的(iv) 与(vi) 时就采用的是这种方法. 当然，为证 $a = b$ 也可证 $a \geqslant y$ 当且仅当 $b \geqslant y$. 但这对证明命题 8.2.1 没有用处，请读者考虑为什么.

(ii) 命题 8.2.1 中的(vi)不可改为 $b \to \bigvee_{i\in I} c_i = \bigvee_{i\in I}(b \to c_i)$ 和 $(\bigwedge_{i\in I} b_i) \to c = \bigvee_{i\in I}(b_i \to c)$. 请读者举出反例.

定义 8.2.4　设 $\to$ 是[0,1]上的二元运算. 如果 $\to$ 满足命题 8.2.1 中的性质(ii)～(vii),则称 $\to$ 为[0,1]上的**正则蕴涵算子**.

由命题 8.2.1 和上述定义并注意连续 t- 模是左连续的,得

命题 8.2.2　和左连续三角模相伴随的蕴涵算子是正则蕴涵算子. 特别是 Łukasiewicz 蕴涵算子 R_L,Gödel 蕴涵算子 R_G,乘积蕴涵算子 R_π 和蕴涵算子 R_0 都是正则蕴涵算子.

下面的命题可看作是命题 8.2.1 的逆.

命题 8.2.3　设 $\to$ 是[0,1]上的正则蕴涵算子,在[0,1]上定义二元运算 $\otimes$ 如下:

$$a \otimes b = \bigwedge \{x \mid a \leqslant b \to x\}, \quad x,a,b \in [0,1], \tag{8.2.15}$$

则

(i) $a \otimes b \leqslant c$　当且仅当　$a \leqslant b \to c$.

(ii) $\otimes$ 是[0,1]上的三角模.

(iii) $\otimes$ 是左连续的.

证明　(i) 设 $a \leqslant b \to c$,则由式(8.2.15)立即得出 $a \otimes b \leqslant c$. 反之,设 $a \otimes b = \bigwedge\{x \mid a \leqslant b \to x\} \leqslant c$,则由 $x = 1$ 满足 $a \leqslant b \to x$ 知 $\{b \to x \mid a \leqslant b \to x\}$ 为非空集. 由 $\to$ 的正则性得

$$a \leqslant \bigwedge\{b \to x \mid a \leqslant b \to x\} = b \to \bigwedge\{x \mid a \leqslant b \to x\} \leqslant b \to c.$$

这就证明了(i).

(ii) 由(i)得

$$a \otimes b \leqslant c \quad \text{当且仅当} \quad a \leqslant b \to c \quad \text{当且仅当} \quad b \leqslant a \to c \quad \text{当且仅当} \quad b \otimes a \leqslant c.$$

所以 $a \otimes b = b \otimes a$. 其次,由(i)和 $\otimes$ 满足交换律以及 $\to$ 为正则蕴涵算子知以下各不等式彼此等价:

$$(a \otimes b) \otimes c \leqslant x, \quad a \otimes b \leqslant c \to x, \quad b \otimes a \leqslant c \to x,$$
$$b \leqslant a \to (c \to x), \quad b \leqslant c \to (a \to x), \quad b \otimes c \leqslant a \to x,$$
$$(b \otimes c) \otimes a \leqslant x, \quad a \otimes (b \otimes c) \leqslant x.$$

所以 $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$.

再次,由式(8.2.15)得 $a \otimes 1 = \bigwedge\{x \mid a \leqslant 1 \to x\} = \bigwedge\{x \mid a \leqslant x\} = a$.

最后,设 $b \leqslant c$,则由 $\to$ 的正则性知 $\{x \mid a \leqslant c \to x\} \subset \{x \mid a \leqslant b \to x\}$,所以

$$a \otimes b = \bigwedge\{x \mid a \leqslant b \to x\} \leqslant \bigwedge\{x \mid a \leqslant c \to x\} = a \otimes c.$$

这就证明了 $\otimes$ 是[0,1]上的三角模.

(iii) 由 $\otimes$ 为 t- 模和(i)知以下各式彼此等价:

$$a \otimes \bigvee_{i\in I} b_i \leqslant c,\quad \bigvee_{i\in I} b_i \leqslant a \to c,\quad \forall i \in I, b_i \leqslant a \to c,$$
$$\forall i \in I, a \otimes b_i \leqslant c,\quad \bigvee_{i\in I} (a \otimes b_i) \leqslant c.$$

所以

$$a \otimes \bigvee_{i\in I} b_i = \bigvee_{i\in I} (a \otimes b_i).$$

所以 $\otimes$ 是左连续的三角模.

习　题　8.2

1. 设 $a \otimes_L b = (a+b-1) \vee 0 (a,b \in [0,1])$,试证 $\otimes_L$ 是$[0,1]$上的 t-模.

2. 设 $a \otimes_G b = a \wedge b$,求与 $\otimes_G$ 相伴随的蕴涵算子.

3. 设 $a \otimes_\pi b = ab$,求与 $\otimes_\pi$ 相伴随的蕴涵算子.

4. 设 $\to$ 是 R_0 蕴涵算子,举例说明以下二式一般不成立:

(i) $(\bigwedge_{i\in I} a_i) \to b = \bigvee_{i\in I} (a_i \to b)$.

(ii) $a \to \bigvee_{i\in I} b_i = \bigvee_{i\in I} (a \to b_i)$.

5. 设 $a \to_k b = (1-a) \vee b, a \to_z b = (1-a) \vee (a \wedge b)$. 试证 $\to_k$ 与 $\to_z$ 都不是正则蕴涵算子,从而都不存在相应的伴随 t-模.

6. 设 $\to$ 为 R_0 蕴涵算子,$\alpha,\beta \in (\frac{1}{2},1]$,试证:

(i) 若 $a \to b \geqslant \alpha, b \to c \geqslant \beta$,则 $a \to c \geqslant \alpha \wedge \beta$.

(ii) 若 $a \geqslant \alpha, a \to b \geqslant \beta$,则 $b \geqslant \alpha \wedge \beta$.

7. 举例说明 Łukasiewicz 蕴涵算子 $\to_L (a \to_L b = (1-a+b) \wedge 1)$ 不满足第 6 题中的性质(i)与(ii).

8.3　MV 代数

8.3.1　MV 代数的定义及其演变

MV 代数理论是与 Łukasiewicz 逻辑系统相配套的代数理论. 为证明 Łukasiewicz 逻辑系统的完备性,Chang C. C. 于 1958 年提出了 MV 代数理论①. 其原始定义如下:

定义 8.3.1　**MV 代数**是一个(2,2,1,0,0)型代数$(X,+,\times,*,0,1)$,满足以下条件:

AX1　$x+y=y+x$,　　AX1′　$x\times y=y\times x$,

AX2　$(x+y)+z=x+(y+z)$,　　AX2′　$(x\times y)\times z=x\times(y\times z)$,

AX3　$x+x^*=1$,　　AX3′　$x\times x^*=0$,

① Chang CC. Algebraic analysis of many-valued logics. Trans. Amer. Math. Soc., 88(1958),467～490.

AX4　$x+1=1$,　　AX4′　$x\times 0=0$,

AX5　$x+0=x$,　　AX5′　$x\times 1=x$,

AX6　$(x+y)^*=x^*\times y^*$,　　AX6′ $(x\times y)^*=x^*+y^*$,

AX7　$x=(x^*)^*$,

AX8　$0^*=1$,

AX9　$x\vee y=y\vee x$,　　AX9′　$x\wedge y=y\wedge x$,

AX10 $(x\vee y)\vee z=x\vee(y\vee z)$,　　AX10′ $(x\wedge y)\wedge z=x\wedge(y\wedge z)$,

AX11 $x+(y\wedge z)=(x+y)\wedge(x+z)$,　AX11′ $x\times(y\vee z)=(x\times y)\vee(x\times z)$.

这里

$$x\vee y=(x\times y^*)+y, \tag{8.3.1}$$

$$x\wedge y=(x+y^*)\times y. \tag{8.3.2}$$

以上各条件显然不是相互独立的.事实上,由 AX7 与 AX8 易证

$$x\times y=(x^*+y^*)^*, x+y=(x^*\times y^*)^*. \tag{8.3.3}$$

再由 AX8 与 AX7 得

$$1^*=(0^*)^*=0. \tag{8.3.4}$$

由 AX1 ～ AX8 以及式(8.3.3) 和式(8.3.4) 就可推出 AX1′ ～ AX6′.
又,由式(8.3.1) 和式(8.3.2) 可借助式(8.3.3) 推得

$$(x\vee y)^*=x^*\wedge y^*,\quad (x\wedge y)^*=x^*\vee y^*. \tag{8.3.5}$$

所以可以由 AX9 推得 AX9′,由 AX10 推得 AX10′,以及由 AX11 推得 AX11′.可见定义 8.3.1 中的条件 AX1′～AX11′ 均可略去.如果我们把 $+$ 改写为 $\oplus$,把 $*$ 改写为 $'$,则条件 AX1,AX2 和 AX5 等价于说 $(X,\oplus,0)$ 是以 0 为单位的交换半群.这时由式(8.3.4) 和式(8.3.5) 知定义 8.3.1 可简化为下面的

定义 8.3.2　MV 代数是一个(2,1,0) 型代数 $(X,\oplus,',0)$ 满足条件

(i) $(X,\oplus,0)$ 是以 0 为单位的交换半群.

(ii) $x\oplus x'=0'$.

(iii) $x\oplus 0'=0'$.

(iv) $(x')'=x$.

(v) $x\vee y=y\vee x$.

(vi) $(x\vee y)\vee z=x\vee(y\vee z)$.

(vii) $x\oplus(y\wedge z)=(x\oplus y)\wedge(x\oplus z)$.

这里

$$x\vee y=(x'\oplus y)'\oplus y, x\wedge y=(x'\vee y')'. \tag{8.3.6}$$

下面把定义 8.3.2 进一步简化.

首先,由(v) 和式(8.3.6) 得

$$(x'\oplus y)'\oplus y=(y'\oplus x)'\oplus x. \tag{8.3.7}$$

令 $y=0'$ 则由(iii) 得

$$(x'\oplus y)'\oplus y=(x'\oplus 0')'\oplus 0'=0'.$$

又,由(iv) 知 $y'=0$,从而由 0 为 $\oplus$ 单位得

$$(y'\oplus x)'\oplus x=(0\oplus x)'\oplus x=x\oplus x'.$$

可见由式(8.3.7) 可得出(ii),即条件(ii) 可从定义 8.3.2 中删去.以下证明条件(vi) 与(vii) 也可删去,为此先在 X 中引入二元关系 $\leqslant$ 如下:

定义 8.3.3　设$(X,\oplus,',0)$ 是 MV 代数,用 1 表示 $0'$.规定

$$x\leqslant y \quad \text{当且仅当} \quad x'\oplus y=1,\quad x,y\in X. \tag{8.3.8}$$

命题 8.3.1　按式(8.3.8) 定义的二元关系 $\leqslant$ 是 X 上的偏序,且 1 与 0 分别是偏序集$(X,\leqslant)$ 中的最大元与最小元.

证明　由 $x'\oplus x=1$ 立即得出 $x\leqslant x$.其次,设 $x\leqslant y$ 且 $y\leqslant x$,则 $x'\oplus y=1$,$y'\oplus x=1$ 成立,从而由式(8.3.7) 得

$$y=0\oplus y=(x'\oplus y)'\oplus y=(y'\oplus x)'\oplus x=0\oplus x=x.$$

最后证明 $\leqslant$ 是传递的.先证明

$$x\leqslant y \quad \text{当且仅当} \quad \text{存在 } a\in X \text{ 使 } x\oplus a=y. \tag{8.3.9}$$

事实上,设 $x\oplus a=y$,则

$$x'\oplus y=x'\oplus(x\oplus a)=(x'\oplus x)\oplus a=1\oplus a=1,$$

所以 $x\leqslant y$.反过来,设 $x\leqslant y$,令

$$a=(x\oplus y')', \tag{8.3.10}$$

则由式(8.3.7) 和 $x'\oplus y=1$ 得

$$x\oplus a=(y'\oplus x)'\oplus x=(x'\oplus y)'\oplus y=1'\oplus y=0\oplus y=y.$$

所以结论(8.3.9) 成立.设 $x\leqslant y$ 且 $y\leqslant z$,则有 $a,b\in X$ 使 $x\oplus a=y$,$y\oplus b=z$,从而 $x\oplus(a\oplus b)=z$,所以由结论(8.3.9) 得 $x\leqslant z$.这就证明了$(X,\leqslant)$ 为偏序集.

又,由 $x'\oplus 1=1$ 知 1 是$(X,\leqslant)$ 中的最大元.由 $0'\oplus x=1$ 知 0 是$(X,\leqslant)$ 中的最小元.

由式(8.3.8) 知 $x\leqslant y$ 当且仅当 $x'\oplus y=1$ 当且仅当$(y')'\oplus x'=1$ 当且仅当 $y'\leqslant x'$,

从而由$(x')'=x$ 得

命题 8.3.2　$'$:$(X,\leqslant)\to(X,\leqslant)$ 是逆序对合对应.

又,由结论(8.3.9) 容易证明

$$\text{若 } x\leqslant y,\text{则 } x\oplus a\leqslant y\oplus a,\quad x,y,a\in X. \tag{8.3.11}$$

由此可以证明下面的

命题 8.3.3　设$(X,\oplus,',0)$ 是 MV 代数,则$(X,\leqslant)$ 构成一个格,且由式(8.3.6) 给出的 $x\vee y$ 与 $x\wedge y$ 分别是$\{x,y\}$ 的上确界与下确界.

证明 由式(8.3.6)得

$$y' \oplus (x \vee y) = y' \oplus ((x' \oplus y)' \oplus y) = (y' \oplus y) \oplus (x' \oplus y)'$$
$$= 1 \oplus (x' \oplus y)' = 1,$$

所以 $y \leqslant x \vee y$. 类似地

$$x' \oplus (x \vee y) = x' \oplus (y \vee x) = x' \oplus ((y' \oplus x)' \oplus x) = 1,$$

所以 $x \leqslant x \vee y$. 由此可知 $x \vee y$ 是 $\{x,y\}$ 的上界. 设 t 是 $\{x,y\}$ 的任一上界,则由命题 8.3.2 知 $t' \leqslant x'$, $t' \leqslant y'$. 那么由式(8.3.11)得

$$t' \oplus x \leqslant y' \oplus x, \quad (y' \oplus x)' \leqslant (t' \oplus x)'.$$

由此并注意 $x' \oplus t = 1$ 则由式(8.3.7)得

$$t = (x' \oplus t)' \oplus t = (t' \oplus x)' \oplus x \geqslant (y' \oplus x)' \oplus x = y \vee x = x \vee y.$$

这就证明了 $x \vee y$ 是 $\{x,y\}$ 的上确界. 由此以及 $'$ 为 $(X, \leqslant)$ 上的逆序对合对应易证 $(x' \vee y')'$ 是 $\{x,y\}$ 的下确界. 所以由式(8.3.6)知 $x \wedge y$ 是 $\{x,y\}$ 的下确界. 所以 $(X, \leqslant)$ 是格.

由命题 8.3.3 知定义 8.3.2 中的条件(vi)可删去.

最后,由式(8.3.11)知 $x \oplus (y \wedge z)$ 是 $\{x \oplus y, x \oplus z\}$ 的下界. 设 t 是 $\{x \oplus y, x \oplus z\}$ 的任一下界,则

$$t' \oplus (x \oplus y) = 1, \quad t' \oplus (x \oplus z) = 1.$$

即

$$(t' \oplus x) \oplus y = 1, \quad (t' \oplus x) \oplus z = 1.$$

由此可知 $(t' \oplus x)' \leqslant y$, $(t' \oplus x)' \leqslant z$, 从而 $(t' \oplus x)' \leqslant y \wedge z$, 即 $(t' \oplus x) \oplus (y \wedge z) = 1$ 或 $t' \oplus (x \oplus (y \wedge z)) = 1$. 所以 $t \leqslant x \oplus (y \wedge z)$. 这就证明了 $x \oplus (y \wedge z)$ 是 $\{x \oplus y, x \oplus z\}$ 的下确界,即定义 8.3.2 中的条件(vii)成立,它可由前面的性质所推出,所以也可以删去.

综上所述知 MV 代数的定义可简化如下:

定义 8.3.4 MV 代数是一个(2,1,0)型代数 $(X, \oplus, ', 0)$, 满足条件

(i) $(X, \oplus, 0)$ 是以 0 为单位的交换半群.

(ii) $x \oplus 0' = 0'$.

(iii) $(x')' = x$.

(iv) $(x' \oplus y)' \oplus y = (y' \oplus x)' \oplus x$.

8.3.2 MV 代数中的蕴涵算子

设 $(X, \oplus, ', 0)$ 是 MV 代数,则 $(X, \leqslant)$ 是一个格,这里 $x \leqslant y$ 由 $x' \oplus y = 0'$ 定义. 其实还可利用 $\oplus$ 与 $'$ 在格 X 上定义伴随对 $(*, \rightarrow)$.

命题 8.3.4 设 $(X, \oplus, ', 0)$ 是 MV 代数,在 X 上定义二元运算 $*$ 与 $\rightarrow$ 如下:

$$x * y = (x' \oplus y')'. \tag{8.3.12}$$

$$x \rightarrow y = x' \oplus y. \tag{8.3.13}$$

则$(X, *, 1)$是以1为单位的交换半群,且下面的伴随性质成立:

$$x * y \leqslant z \quad 当且仅当 \quad x \leqslant y \to z. \tag{8.3.14}$$

这里$1 = 0'$.

证明 由$(X, \oplus, 0)$是以0为单位的交换半群和式(8.3.12)立即推出$(X, *, 1)$是以1为单位的交换半群. 又,由式(8.3.8)和式(8.3.13)知以下各式彼此等价:

$$x * y \leqslant z, \quad (x * y)' \oplus z = 1, \quad (x' \oplus y') \oplus z = 1,$$
$$x' \oplus (y' \oplus z) = 1, \quad x \leqslant y' \oplus z, \quad x \leqslant y \to z.$$

所以式(8.3.14)成立.

命题 8.3.5 在MV代数中以下各性质成立:

(i) $1 \to x = x, x \to 0 = x', 0 * x = 0$.

(ii) $x \to y = 1$ 当且仅当 $x \leqslant y$.

(iii) $x \to y = y' \to x'$.

(iv) $x \to (y \to z) = y \to (x \to z)$.

(v) $x * (y \vee z) = (x * y) \vee (x * z)$.

(vi) $x \to (y \wedge z) = (x \to y) \wedge (x \to z)$.

(vii) $x \wedge y = x * (x \to y)$.

(viii) $(x \to y) \vee (y \to x) = 1$.

(ix) $(x \to y) \to y = x \vee y$.

(x) $x \to (y \vee z) = (x \to y) \vee (x \to z)$.

(xi) $(x \wedge y) \to z = (x \to z) \vee (y \to z)$.

(xii) $(x \vee y) \to z = (x \to z) \wedge (y \to z)$.

证明 (i)~(iv)的证明容易从式(8.3.13)得出,略去.

(v)的证明由以下各式彼此等价可得

$$x * (y \vee z) \leqslant t, y \vee z \leqslant x \to t, y \leqslant x \to t \text{ 且 } z \leqslant x \to t,$$
$$x * y \leqslant t \text{ 且 } x * z \leqslant t, (x * y) \vee (x * z) \leqslant t.$$

(vi) 由定义8.3.2中的条件(vii)得

$$x \to (y \wedge z) = x' \oplus (y \wedge z) = (x' \oplus y) \wedge (x' \oplus z) = (x \to y) \wedge (x \to z).$$

(vii) 由 $'$ 为对合对应和式(8.3.6)与式(8.3.12)得

$$x * (x \to y) = (x * (x' \oplus y))'' = ((y \oplus x')' \oplus x')'$$
$$= (y' \vee x')' = x \wedge y,$$

所以性质(vii)成立.

(viii) 为证(viii)可等价地证明$(x \to y)' \wedge (y \to x)' = 0$,即$(x' \oplus y)' \wedge (y' \oplus x)' = 0$,或

$$(x * y') \wedge (y * x') = 0. \tag{8.3.15}$$

事实上,由已证明的性质(vii)有

$$(x*y')\wedge(y*x')=(x*y')*((x*y')\to(y*x'))$$
$$=x*y'*((x*y')'\oplus(y*x'))$$
$$=x*y'*(y\oplus x'\oplus(y*x')).\qquad(8.3.16)$$

令 $t=x'\oplus(y*x')$，则由式(8.3.16)得

$$(x*y')\wedge(y*x')=x*y'*(y\oplus t)=x*y'*(y'\to t)$$
$$=x*(y'\wedge t)=x*(t\wedge y')$$
$$=x*t*(t\to y')$$
$$=x*t*(t'\oplus y')$$
$$=x*(x'\oplus(y*x'))*[(x'\oplus(y*x'))'\oplus y'].$$
$$(8.3.17)$$

又，

$$x*(x'\oplus(y*x'))=x*(x\to(y*x'))=x\wedge(y*x')$$
$$=(y*x')\wedge x=(y*x')*((y*x')\to x)$$
$$=(y*x')*((y*x')'\oplus x).\qquad(8.3.18)$$

所以由式(8.3.16)～式(8.3.18)各式，并注意 $*$ 是交换的与结合的，得

$$(x*y')\wedge(y*x')=(y*x')*((y*x')'\oplus x)*[(x*(y*x')')\oplus y']$$
$$=x'*(x\oplus(y*x')')*y*[y'\oplus(x*(y'\oplus x))].$$
$$(8.3.19)$$

因为

$$x'*(x\oplus(y*x')')=x'*(x'\to(y*x')')=x'\wedge(y*x')'\leqslant x'.$$
$$(8.3.20)$$

$$y*[y'\oplus(x*(y'\oplus x))]=y*[y\to(x*(y'\oplus x))]$$
$$=y\wedge(x*(y'\oplus x))\leqslant x*(y'\oplus x).$$
$$(8.3.21)$$

所以由式(8.3.19)～式(8.3.21)各式，并注意算子 $*$ 保序(请读者证明这一事实)得

$$(x*y')\wedge(y*x')\leqslant x'*x*(y'\oplus x)=x*(x\to 0)*(y'\oplus x)$$
$$=(x\wedge 0)*(y'\oplus x)=0*(y'\oplus x)=0.$$

这就证明了式(8.3.15)，从而性质(viii)成立.

(ix) 由蕴涵的定义和式(8.3.6)立即得出

$$(x\to y)\to y=(x'\oplus y)'\oplus y=x\vee y.$$

(x) 由已证的性质(vii)，(v)，(ix)，(iv)和(viii)得

$$x\to(y\vee z)=[(y\to z)\vee(z\to y)]*(x\to(y\vee z))$$
$$=[(y\to z)*(x\to(y\vee z))]\vee[(z\to y)*(x\to(z\vee y))]$$
$$=[(y\to z)*(x\to((y\to z)\to z))]\vee[(z\to y)*(x\to((z\to$$

$$
\begin{aligned}
&y) \to y))] \\
&= [(y \to z) * ((y \to z) \to (x \to z))] \vee [(z \to y) * ((z \to y) \to \\
&(x \to y))] \\
&= [(y \to z) \wedge (x \to z)] \vee [(z \to y) \wedge (x \to y)] \\
&\leqslant (x \to y) \vee (x \to z).
\end{aligned}
$$

又，易证相反的不等式也成立，所以性质(x)成立.

最后，性质(xi)和(xii)可由性质(iii)和式(8.3.6)得出.

命题 8.3.6　设$(X, \oplus, ', 0)$是MV代数，则X按定义8.3.3中规定的偏序$\leqslant$构成分配格.

证明　由命题8.3.5中的性质(vii)，性质(x)和性质(v)得

$$
\begin{aligned}
x \wedge (y \vee z) &= x * (x \to (y \vee z)) = x * ((x \to y) \vee (x \to z)) \\
&= (x * (x \to y)) \vee (x * (x \to z)) \\
&= (x \wedge y) \vee (x \wedge z).
\end{aligned}
$$

所以$(X, \leqslant)$是分配格.

8.3.3 MV 代数的完备性定理

先看两个MV代数的例子.

例 8.3.1　设B是Boole代数，$': B \to B$是B上的补运算，0是B的最小元. 如果规定$x \oplus y = x \vee y$，则$(B, \oplus, ', 0)$是MV代数.

事实上，定义8.3.4中的条件(i)～(iii)显然成立. 以下验证(iv).

$$
\begin{aligned}
(x' \oplus y)' \oplus y &= (x' \vee y)' \vee y = (x \wedge y') \vee y \\
&= (x \vee y) \wedge (y' \vee y) = (x \vee y) \wedge 1 = x \vee y.
\end{aligned}
$$

类似地，$(y' \oplus x)' \oplus x = y \vee x$. 所以条件(iv)成立.

例 8.3.2　设$X = [0,1]$，在X上规定

$$
x \oplus y = (x + y) \wedge 1, \quad x' = 1 - x, \quad x, y \in [0,1], \tag{8.3.22}
$$

则易证定义8.3.4中的条件(i)～(iii)成立. 又，由

$$
(x' \oplus y)' \oplus y = [(1 - (1 - x + y) \wedge 1) + y] \wedge 1
$$

知当$x < y$时$(x' \oplus y)' \oplus y = y$，当$x \geqslant y$时$(x' \oplus y)' \oplus y = x$. 可见

$$
(x' \oplus y)' \oplus y = \max\{x, y\}. \tag{8.3.23}
$$

同样可证$(y' \oplus x)' \oplus x = \max\{x, y\}$，所以(iv)成立.

以下称例8.3.2中的MV代数为**MV单位区间**.

定义 8.3.5　设$X = \{x_1, x_2, \cdots\} \cup \{0\}$，$\oplus$与$'$分别是二元与一元运算，$F(X)$是由$X$生成的$(\oplus, ')$型自由代数，即

(i) $X \subset F(X)$.

(ii) 若$\alpha, \beta \in F(X)$，则$\alpha' \in F(X)$，$\alpha \oplus \beta \in F(X)$.

(iii) $F(X)$中的元均可由(i)与(ii)在有限步之内得出.

则称 $F(X)$ 为 **X 生成的自由 MV 代数**. 设 $\alpha,\beta \in F(X)$. 称 $\alpha = \beta$ 为 **MV 等式**.

定义 8.3.6 设 $F(X)$ 是 X 生成的自由 MV 代数. A 是任一 MV 代数, $v: F(X) \to A$ 是同态映射,即

(i) $v(0) = 0$.

(ii) $v(\alpha') = (v(\alpha))'$.

(iii) $v(\alpha \oplus \beta) = v(\alpha) \oplus v(\beta)$.

则称 v 为 **$F(X)$ 在 A 中的赋值**. 设 $\alpha = \beta$ 为 MV 等式,如果对每个 $F(X)$ 在 A 中的赋值 v 均有 $v(\alpha) = v(\beta)$,则称 MV 等式 $\alpha = \beta$ **在 MV 代数 A 中成立**.

下面是 Chang C. C. 关于 MV 代数的完备性定理,其证明可参看文献[11].

命题 8.3.7 一个 MV 等式在每个 MV 代数中都成立的充要条件是它在 MV 单位区间中成立.

习　　题　8.3

1. 设 $(X, \oplus, ', 0)$ 是 MV 代数. $x * y = (x' \oplus y')'$, $x \to y = x' \oplus y$. 试证:

(i) $x \oplus x' = 1$, $\quad x * x' = 0$.

(ii) $(x \to y) \to ((y \to z) \to (x \to z)) = 1$.

(iii) $(x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z)) = 1$ 不必成立(参考 MV 单位区间). 以上 $1 = 0'$.

2. 承上,试证算子 $\oplus$ 与 $*$ 都保序,即:

(i) 设 $x \leqslant y$,则 $x \oplus z \leqslant y \oplus z$.

(ii) 设 $x \leqslant y$,则 $x * z \leqslant y * z$.

这里 $x \leqslant y$ 指 $x' \oplus y = 1$.

(iii) 设 $x \to y = y \to x = 1$,则 $x = y$.

3. 设 $(X_i, \oplus_i, '_i, 0_i)(i \in I)$ 为一族 MV 代数. 令 $X = \prod_{i \in I} X_i$. 在 X 上点式地定义 $\oplus$, $'$, 和 0, 即

$$(x \oplus y)_i = x_i \oplus_i y_i, \quad (x')_i = (x_i)'_i,$$
$$x = 0 \quad \text{当且仅当} \quad x_i = 0_i, \quad i \in I.$$

这里 x_i 表示 x 的 i- 坐标,试证 $(X, \oplus, ', 0)$ 为 MV 代数. 特别是一族 MV 单位区间的乘积 $[0,1]^I$ 是 MV 代数,叫 **MV 方体**.

8.4 Łukasiewicz 命题演算系统

8.4.1 语义理论

为便于称呼起见,我们用 **Łuk** 表示 Łukasiewicz 命题演算系统. 本节中暂不涉及 **Łuk** 的公理与推理规则,但要用到它的全部公式之集 $F(S)$,这里 $F(S)$ 就是本书

第 2 章定义 2.2.1 中由 $S=\{p_1,p_2,\cdots\}$ 生成的$(\neg,\rightarrow)$型自由代数. 换句话说,系统 **Łuk** 与经典的二值命题演算系统 $\boldsymbol{L}$ 有相同的公式集. 但在建立语义理论时由于作为“打分表”的赋值集将要取作 MV 单位区间,**Łuk** 的语义理论与 $\boldsymbol{L}$ 的语义理论有很大不同.

设$[0,1]$为 MV 单位区间,则$[0,1]$上有两个运算$\oplus$与$'$. 从它们出发还可引入更多的运算. 我们有

命题 8.4.1 设$[0,1]$是 MV 单位区间,则:

(i) 定义 $x\leqslant y$ 当且仅当 $x'\oplus y=1(x,y\in[0,1])$,则 $\leqslant$ 就是$[0,1]$中的自然序.

(ii) 定义 $x\vee y=(x'\oplus y)'\oplus y$,则 $\vee$ 就是$[0,1]$中的取大运算,那么由 $x\wedge y=(x'\vee y')'$ 给出的 $\wedge$ 就是$[0,1]$中的取小运算.

(iii) 运算$\oplus$可用$\rightarrow$与$'$表达,即 $x\oplus y=x'\rightarrow y$,特别是由此以及例 8.3.2 可知 $x\rightarrow y=(1-x+y)\wedge 1(x,y\in[0,1])$.

证明 只需证明(i),因为(ii)是命题 8.3.3 和(i)的直接推论,而(iii)是显然的. 这里把(ii),(iii)与(i)一并列出是为了说明 MV 单位区间中的$\leqslant$, $\vee$, $\wedge$与通常区间$[0,1]$中的对应概念完全一致,而$\rightarrow$又正是例 8.2.8 的 Łukasiewicz 蕴涵算子. 现在来证明(i). 由例 8.3.2 知 $x'\oplus y=1$ 即$(1-x+y)\wedge 1=1$. 此式显然等价于 x 在通常序之下不超过 y,即按$[0,1]$上的自然序 $x\leqslant y$.

定义 8.4.1 设 $F(S)$ 是由 $S=\{p_1,p_2,\cdots\}$ 生成的$(\neg,\rightarrow)$型自由代数,在 $F(S)$ 中引入新的逻辑连接词如下:

(i) 用 $A\vee B$ 表示$(A\rightarrow B)\rightarrow B$.

(ii) 用 $A\oplus B$ 表示 $\neg A\rightarrow B$.

(iii) 用 $A\wedge B$ 表示 $\neg(\neg A\vee\neg B)$.

在 MV 单位区间$[0,1]$中设 $\neg x=x'$,则$[0,1]$是$(\neg,\rightarrow)$型代数.

定义 8.4.2 设 $v:F(S)\rightarrow[0,1]$是映射,这里$[0,1]$是 MV 单位区间,若 v 是$(\neg,\rightarrow)$型同态,即

$$\begin{aligned}&v(\neg A)=\neg v(A)=1-v(A),\\&v(A\rightarrow B)=v(A)\rightarrow v(B)=(1-v(A)+v(B))\wedge 1,\end{aligned}\tag{8.4.1}$$

则称 v 为 $F(S)$ **在 MV 单位区间$[0,1]$中的赋值**,简称 v 为**赋值**. $F(S)$ 的全体赋值之集记作 Ω_L.

命题 8.4.2 设 $A,B\in F(S)$, $v\in\Omega_L$,则

(i) $v(A\vee B)=v(B\vee A)=v(A)\vee v(B)$.

(ii) $v(A\oplus B)=v(B\oplus A)=v(A)\oplus v(B)$.

(iii) $v(A\wedge B)=v(B\wedge A)=v(A)\wedge v(B)$.

即,v 保持运算 $\vee$, $\oplus$ 和 $\wedge$.

证明　(i) 由 v 为$(\neg,\rightarrow)$型同态和定义 8.4.1 以及命题 8.3.5(ix) 知

$v(A\vee B)=v((A\rightarrow B)\rightarrow B)=(v(A)\rightarrow v(B))\rightarrow v(B)=v(A)\vee v(B)$.
由命题 8.4.1,在 MV 单位区间中 $v(A)\vee v(B)=\max\{v(A),v(B)\}=v(B)\vee v(A)$,所以(i) 成立.

(ii) 由 v 为$(\neg,\rightarrow)$型同态和定义 8.4.1 以及命题 8.4.1 得

$$\begin{aligned}v(A\oplus B)&=v(\neg A\rightarrow B)=\neg v(A)\rightarrow v(B)\\&=v(A)\oplus v(B)=v(B)\oplus v(A)\\&=\neg v(B)\rightarrow v(A)=v(\neg B\rightarrow A)=v(B\oplus A).\end{aligned}$$

(iii) 由已证的(i) 以及 v 保 $\neg$ 运算得

$$\begin{aligned}v(A\wedge B)&=v(\neg(\neg A\vee\neg B))=\neg(\neg v(A)\vee\neg v(B))\\&=v(A)\wedge v(B)=v(B)\wedge v(A)=v(B\wedge A).\end{aligned}$$

定义 8.4.3　设 $A,B\in F(S)$.

(i) 如果对每个 $v\in\Omega_L$ 均有 $v(A)=1$,则称 A 为**重言式**,记作 $\models A$. 如果对每个 $v\in\Omega_L$ 均有 $v(A)=0$,则称 A 为**矛盾式**.

(ii) 如果对每个 $v\in\Omega_L$ 均有 $v(A)=v(B)$,则称 A 与 B **逻辑等价**,记作 $A\approx B$.

由命题 8.4.2 立即得出下面的

推论 8.4.1　$A\vee B\approx B\vee A,A\oplus B\approx B\oplus A,A\wedge B\approx B\wedge A$.

例 8.4.1　以下各式均为重言式:

(i) $A\rightarrow(B\rightarrow A)$.

(ii) $(A\rightarrow B)\rightarrow((B\rightarrow C)\rightarrow(A\rightarrow C))$.

(iii) $((A\rightarrow B)\rightarrow B)\rightarrow((B\rightarrow A)\rightarrow A)$.

(iv) $(\neg A\rightarrow\neg B)\rightarrow(B\rightarrow A)$.

证明　为书写简便起见,依次用 E_1,E_2,E_3 和 E_4 表示以上从(i) 到(iv) 的 4 个公式. 设 $v\in\Omega_L$,只需证 $v(E_i)=1(i=1,2,3,4)$. 分别用 a,b 和 c 表示 $v(A),v(B)$ 和 $v(C)$.

(i) 注意在 MV 单位区间中 $\neg a\oplus a=a\rightarrow a=1$,得

$$\begin{aligned}v(E_1)&=v(A)\rightarrow(v(B)\rightarrow v(A))=\neg a\oplus(\neg b\oplus a)\\&=(\neg a\oplus a)\oplus(\neg b)=1\oplus(\neg b)=1.\end{aligned}$$

(ii) $v(E_2)=(a\rightarrow b)\rightarrow((b\rightarrow c)\rightarrow(a\rightarrow c))$. 因为当 $x\leqslant y$ 时 $x\rightarrow y=1$,所以当 $a\leqslant c$ 时 $v(E_2)=1$. 以下设 $a>c$.

(1) 设 $b\geqslant a>c$,则 $a\rightarrow b=1$,从而由 $1\rightarrow x=x$ 和命题 8.3.5 的(iv) 和(ix)得

$$v(E_2)=(b\rightarrow c)\rightarrow(a\rightarrow c)=a\rightarrow((b\rightarrow c)\rightarrow c)=a\rightarrow b\vee c=1.$$

(2) 设 $a>b>c$,则由

$$
\begin{aligned}
(b \to c) \to (a \to c) &= [1-(1-b+c)+(1-a+c)] \wedge 1 \\
&= (1-a+b) \wedge 1 \\
&= a \to b
\end{aligned}
$$

得

$$v(E_2) = (a \to b) \to (a \to b) = 1.$$

(3) 设 $a > c \geqslant b$,则 $b \to c = 1$. 所以

$$
\begin{aligned}
v(E_2) = (a \to b) \to (a \to c) &= [1-(1-a+b)+(1-a+c)] \wedge 1 \\
&= (1-b+c) \wedge 1 = 1.
\end{aligned}
$$

综上所述知 $v(E_2) = 1$ 成立.

(iii) 由命题 8.3.5 的(ix) 得

$$v(E_3) = ((a \to b) \to b) \to ((b \to a) \to a) = (a \vee b) \to (b \vee a) = 1.$$

(iv) 由命题 8.3.5 的(iii) 得

$$
\begin{aligned}
v(E_4) &= (\neg a \to \neg b) \to (b \to a) = (a' \to b') \to (b \to a) \\
&= (b \to a) \to (b \to a) = 1.
\end{aligned}
$$

注 8.4.1 (i) 由于 $F(S)$ 是由 S 生成的自由代数,所以任一映射 $v_0 : S \to [0,1]$ 均可扩张为一个赋值 $v: F(S) \to [0,1]$.

(ii) 二值逻辑系统 $\boldsymbol{L}$ 中的重言式不必是 **Łuk** 中的重言式. 如 $p \vee \neg p$ 是 $\boldsymbol{L}$ 中的重言式,但它不是 **Łuk** 中的重言式,这可由给 p_1 赋值 $\frac{1}{2}$ 而看出. 又,$\boldsymbol{L}$ 中的公理 (L2) 也不是 **Łuk** 中的重言式,请读者自行验证.

(iii) **Łuk** 中的重言式一定是 $\boldsymbol{L}$ 中的重言式,因为 $\Omega \subset \Omega_L$,即,每个$(\neg, \to)$型同态 $v: F(S) \to \{0,1\}$ 也是同态 $v: F(S) \to [0,1]$. 特别是命题 8.4.7 中的公式都是 $\boldsymbol{L}$ 中的重言式. 由此可知在 **Łuk** 中逻辑等价的公式一定也是在 $\boldsymbol{L}$ 中逻辑等价,但反之不真. 例如,在 $\boldsymbol{L}$ 中 $p \vee \neg p$ 与 $p \to p$ 逻辑等价,但在 **Łuk** 中二者不是逻辑等价的,因为后者是重言式,而前者不是重言式.

(iv) 在 **Łuk** 中,一个公式不必逻辑等价于一个析取范式. 因为对任一析取范式中出现的原子公式均赋值 $\frac{1}{2}$,则此析取范式的赋值为 $\frac{1}{2}$. 可见至少重言式与矛盾式都不能化为与之逻辑等价的析取范式. 同理,**Łuk** 中的公式一般不能化为逻辑等价的合取范式.

8.4.2 语构理论

1. 形式系统 Łuk

在第 2 章中讲过,一个形式系统由符号表、公式集、公理集和推理规则集 4 个部分组成. Łukasiewicz 的形式系统 **Łuk** 的符号表与公式集分别和二值题逻辑系统 $\boldsymbol{L}$

的符号表与公式集相同，推理规则也相同，即 MP 规则，但 **Łuk** 中的公理集与 **L** 中的公理集不同.

定义 8.4.4 Łukasiewicz 命题逻辑系统 **Łuk** 中的公理由以下形式的公式组成：

(Lu1) $A \to (B \to A)$.

(Lu2) $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$.

(Lu3) $((A \to B) \to B) \to ((B \to A) \to A)$.

(Lu4) $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$.

定义 8.4.5 设 $\Gamma \subset F(S)$，$A \in F(S)$. 从 Γ 到 A 的推演是一个公式的有限序列 $A_1, \cdots, A_n$ 满足条件 $A_n = A$，且对每个公式 $A_i (i \leqslant n)$，A_i 是公理或 $A_i \in \Gamma$，或存在 $j, k < i$ 使 A_i 是由 A_j 与 A_k 使用 MP 推得的结果. A 叫做 Γ- **结论**，记作 $\Gamma \vdash A$. n 叫推演长度. 当 $\Gamma = \phi$ 时，将 $\Gamma \vdash A$ 简记为 $\vdash A$，并称 A 为**定理**.

第 2 章中的注 2.3.2 在本章中仍然有效. 特别是以后可由已证的定理出发去证明新的定理.

命题 8.4.3 三段论推理规则 HS 成立，即

$$\{A \to B, B \to C\} \vdash A \to C, \quad A, B, C \in F(S). \tag{8.4.2}$$

证明 (1) $A \to B$ 假设

(2) $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$ (Lu2)

(3) $(B \to C) \to (A \to C)$ (1),(2),MP

(4) $B \to C$ 假设

(5) $A \to C$ (3),(4),MP

例 8.4.2 试证以下各式为 **Łuk** 中的定理：

(i) $B \to B \vee C$.

(ii) $(B \vee C \to (A \to C)) \to (B \to (A \to C))$.

(iii) $(A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$.

以上 $B \vee C$ 是 $(B \to C) \to C$ 的简写.

证明 (i) $B \to B \vee C$ 的证明：

(1) $B \to ((C \to B) \to B)$ (Lu1)

(2) $((C \to B) \to B) \to ((B \to C) \to C)$ (Lu3)

(3) $B \to ((B \to C) \to C)$ (1),(2),HS

所以

$$\vdash B \to B \vee C, \quad B, C \in F(S). \tag{8.4.3}$$

(ii) $((B \vee C) \to (A \to C)) \to (B \to (A \to C))$ 的证明：

(1) $B \to B \vee C$ (i) 中已证定理

(2) $(B \to (B \vee C)) \to ((B \vee C \to (A \to C)) \to (B \to (A \to C)))$ (Lu2)

(3) $(B \vee C \to (A \to C)) \to (B \to (A \to C))$ (1),(2),MP

(iii) $(A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$ 的证明：

(1) $(A \to (B \to C)) \to (((B \to C) \to C) \to (A \to C))$　　(Lu2)

(2) $(((B \to C) \to C) \to (A \to C)) \to (B \to (A \to C))$　　(ii) 中已证定理

(3) $(A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$　　(1),(2),HS

所以

$$\vdash (A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C)). \tag{8.4.4}$$

例 8.4.3　(i) 由 $A \to (B \to A)$ 为公理和式(8.4.4)运用 MP 可知 $B \to (A \to A)$ 为定理. 取 B 为任一公理，运用 MP 立即得出

$$\vdash A \to A. \tag{8.4.5}$$

(ii) 因为 $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$ 是公理(Lu2)，所以由式(8.4.4)和 MP 立即得出

$$\vdash (B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C)). \tag{8.4.6}$$

例 8.4.4　试证以下各式成立：

(i) $\vdash \neg\neg A \to A.$　　(8.4.7)

(ii) $\vdash (A \to \neg B) \to (B \to \neg A).$　　(8.4.8)

(iii) $\vdash A \to \neg\neg A.$　　(8.4.9)

(iv) $\vdash (\neg A \to B) \to (\neg B \to A).$　　(8.4.10)

(v) $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A).$　　(8.4.11)

证明　(i) 由 $\neg\neg A \to (\neg\neg B \to \neg\neg A)$，$(\neg\neg B \to \neg\neg A) \to (\neg A \to \neg B)$ 以及 $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$ 都是公理知，运用两次 HS 就得到

$$\vdash \neg\neg A \to (B \to A). \tag{8.4.12}$$

由式(8.4.12)和式(8.4.4)得 $\vdash B \to (\neg\neg A \to A)$. 再取 B 为任一公理即可由 MP 证明式(8.4.7).

(ii) 式(8.4.8)的证明如下：

(1) $(\neg\neg A \to A) \to ((A \to \neg B) \to (\neg\neg A \to \neg B))$　　(Lu2)

(2) $\neg\neg A \to A$　　(i) 中已证定理

(3) $(A \to \neg B) \to (\neg\neg A \to \neg B)$　　(1),(2),MP

(4) $(\neg\neg A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$　　(Lu4)

(5) $(A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$　　(3),(4),HS

(iii) 由式(8.4.8)得 $\vdash (\neg A \to \neg A) \to (A \to \neg\neg A)$. 所以由式(8.4.5)和 MP 即得式(8.4.9).

(iv) 由式(8.4.9)知 $\vdash B \to \neg\neg B$. 又，由式(8.4.6)得

$$\vdash (B \to \neg\neg B) \to ((\neg A \to B) \to (\neg A \to \neg\neg B)).$$

所以由 MP 可得 $\vdash (\neg A \to B) \to (\neg A \to \neg\neg B)$. 又，$\vdash (\neg A \to \neg\neg B) \to (\neg B \to A)$. 所以由 HS 即得式(8.4.10).

(v) 最后,式(8.4.11)的证明如下:

(1) $B \to \neg\neg B$　　(iii)中已证定理

(2) $(B \to \neg\neg B) \to ((A \to B) \to (A \to \neg\neg B))$　　式(8.4.6)中定理

(3) $(A \to B) \to (A \to \neg\neg B)$　　(1),(2),MP

(4) $(A \to \neg\neg B) \to (\neg B \to \neg A)$　　(ii)中已证定理

(5) $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$　　(3),(4),HS

至此我们已证明了 **Łuk** 中的许多定理,它们是纯形式化地从 4 条公理(Lu1)~(Lu4)运用 MP 而推得的. 一个自然的问题是:这些定理在语义框架中是否是好公式?即,是否 Ω_L 中的每个"裁判"v 都给它们打满分?下面的定理回答了这一问题.

命题 8.4.4(可靠性定理)　**Łuk** 中的定理都是重言式,即,如果 $\vdash A$ 成立,则 $\models A$ 成立($A \in F(S)$).

证明　由例 8.4.1 知 **Łuk** 中的 4 条公理都是重言式. 又,如果 A 和 $A \to B$ 都是重言式,容易证明 B 也是重言式,即 MP 推理是保持重言式的,所以由定义 8.4.5 知 **Łuk** 中的定理都是重言式.

2. Łuk 的完备性定理

定义 8.4.6　设 $A, B \in F(S)$,如果 $A \to B$ 与 $B \to A$ 都是定理,则称 A 与 B **可证等价**,记作 $A \sim B$.

由可靠性定理知若 $A \sim B$ 则 $A \to B$ 与 $B \to A$ 都是重言式,即对每个 $v \in \Omega_L$ 均有 $v(A \to B) = v(B \to A) = 1$. 由此立即得出 $v(A) = v(B)$. 可见下面的命题成立:

命题 8.4.5　设 $A \sim B$,则 $A \approx B$.

由例 8.4.4,定义 8.4.4,定义 8.4.1 和式(8.4.4)得如下命题:

命题 8.4.6　设 $A, B, C \in F(S)$,则

(i) $\neg\neg A \sim A$.

(ii) $(A \to B) \sim (\neg B \to \neg A)$.

(iii) $((A \to B) \to B) \sim ((B \to A) \to A)$,即 $A \vee B \sim B \vee A$.

(iv) $(\neg A \to B) \sim (\neg B \to A)$,即 $A \oplus B \sim B \oplus A$.

(v) $(A \to \neg B) \sim (B \to \neg A)$.

(vi) $(A \to (B \to C)) \sim (B \to (A \to C))$.

由命题 8.4.6 可以证明 $F(S)$ 上的可证等价关系 $\sim$ 是 $F(S)$ 上的同余关系.

命题 8.4.7　$F(S)$ 上的可证等价关系 $\sim$ 是 $F(S)$ 上的同余关系,即:

(i) 若 $A \sim B$,则 $\neg A \sim \neg B$.

(ii) 若 $A \sim B$ 且 $C \sim D$,则$(A \to C) \sim (B \to D)$.

证明　$\sim$ 是 $F(S)$ 上的等价关系是容易证明的,略去. 以下证明(i)与(ii)

成立.

(i) 设 $A \sim B$,则 $\vdash A \to B$ 且 $\vdash B \to A$. 由命题 8.4.6 的(ii) 立即得出 $\vdash \neg B \to \neg A$ 且 $\vdash \neg A \to \neg B$,所以 $\neg A \sim \neg B$.

(ii) 设 $A \sim B, C \sim D$,则 $\vdash B \to A$. 又由例 8.4.2(i) 知 $\vdash A \to A \vee C$,所以由 HS 得 $\vdash B \to A \vee C$. 又,由式(8.4.4) 得

$$((A \to C) \to (B \to C)) \sim (B \to ((A \to C) \to C)) = B \to A \vee C,$$

所以

$$\vdash (A \to C) \to (B \to C). \tag{8.4.13}$$

进一步,由(Lu 2) 知 $\vdash (B \to C) \to ((C \to D) \to (B \to D))$. 所以由式(8.4.4) 得 $\vdash (C \to D) \to ((B \to C) \to (B \to D))$. 那么由 $C \sim D$ 和 MP 得

$$\vdash (B \to C) \to (B \to D). \tag{8.4.14}$$

由式(8.4.13) 和式(8.4.14) 和 HS 得 $\vdash (A \to C) \to (B \to D)$. 同理可证 $\vdash (B \to D) \to (A \to C)$. 所以$(A \to C) \sim (B \to D)$.

推论 8.4.2　设 $A, B, C \in F(S)$.

(i) 若 $A \sim B, C \sim D$,则 $A \vee C \sim B \vee D$.

(ii) 若 $A \sim B, C \sim D$,则 $A \oplus C \sim B \oplus D$.

(iii) 若 $A \sim B, C \sim D$,则 $A \wedge C \sim B \wedge D$.

命题 8.4.8　在$(\neg, \to)$ 型商代数 $F(S)/\sim$ 中规定

$$[A] \oplus [B] = [\neg A \to B], \quad [A]' = [\neg A] = \neg [A], \quad 0 = [\neg (A \to A)], \tag{8.4.15}$$

则$(F(S)/\sim, \oplus, ', 0)$ 构成一个 MV 代数.

证明　首先注意定义式(8.4.15) 是合理的,以 $0 = [\neg (A \to A)]$ 为例,任取 $A, B \in F(S)$,由式(8.4.5) 知 $A \to A$ 与 $B \to B$ 都是定理从而$(A \to A) \sim (B \to B)$. 再由命题 8.4.7 就得到 $\neg (A \to A) \sim \neg (B \to B)$. 所以 0 的定义是无歧义的.

因为$[A] \oplus [B] = [\neg A \to B] = [A \oplus B]$,所以由命题 8.4.6(iv) 知 $\oplus$ 是交换的. 又,由

$$\begin{aligned}(A \oplus B) \oplus C &= (\neg (\neg A \to B) \to C) \sim (\neg C \to (\neg A \to B)) \\ &\sim (\neg A \to (\neg C \to B)) \sim (\neg A \to (\neg B \to C)) \\ &= A \oplus (B \oplus C)\end{aligned}$$

知 $\oplus$ 是结合的. 又,设 B 为定理,则$(B \to A) \sim A$. 所以

$$[A] \oplus 0 = [\neg A \to \neg (A \to A)] = [(A \to A) \to A] = [A].$$

这就证明了$(F(S)/\sim, \oplus, 0)$ 是以 0 为单位的交换半群.

其次,易证对任一 $B \in F(S)$,$(B \to (A \to A)) \sim (A \to A)$. 所以

$$[A] \oplus 0' = [A] \oplus [A \to A] = [\neg A \to (A \to A)] = [A \to A] = 0'.$$

再次,$([A]')' = [\neg A]' = [\neg \neg A] = [A]$ 成立.

最后，$([A]'\oplus[B])'\oplus[B]=([\neg A]\oplus[B])'\oplus B=[\neg(A\to B)]\oplus[B]$ $=[(A\to B)\to B]$. 同理$([B]'\oplus[A])'\oplus[A]=[(B\to A)\to A]$. 所以由命题8.4.6(iii)知

$$([A]'\oplus[B])'\oplus[B]=([B]'\oplus[A])'\oplus[A].$$

这就证明了$(F(S)/\sim,\oplus,',0)$是MV代数. 它是关于**Łuk**系统的**Lindenbaum代数**，简记为$[F]$. 在$[F]$中把$0'$记为1.

命题8.4.9(Łuk的完备性定理) 设$A\in F(S)$，若A是重言式，则A是定理，即，

$$若\quad \models A,\qquad 则\quad \vdash A. \tag{8.4.16}$$

证明 设$A=f(p_1,\cdots,p_n)$，即A由原子公式$p_1,\cdots,p_n$经逻辑连接词$\neg$与$\to$连接而成，由$\models A$知对任一$v\in\Omega_L$均有

$$v(A)=\overline{f}(v(p_1),\cdots,v(p_n))=1, \tag{8.4.17}$$

这里$\overline{f}$将$[0,1]$中的变元$v(p_1),\cdots,v(p_n)$通过$\neg$与$\to$相连接，其方式恰如f将原子公式$p_1,\cdots,p_n$通过$\neg$与$\to$相连接的方式. 由于$v\in\Omega_L$是任意的，所以$v(p_1),\cdots,v(p_n)$的值在MV单位区间$[0,1]$中任意取值均使式(8.4.17)成立. 这表明式(8.4.17)是MV单位区间$[0,1]$中的等式. 由MV代数的完备性定理命题8.3.7知等式(8.4.17)在每个MV代数中都成立. 特别是式(8.4.17)也在MV代数$[F]$中成立.

考虑映射 $u:F(S)\to[F]$，这里

$$u(A)=[A],\quad A\in F(S). \tag{8.4.18}$$

由$u(\neg A)=[\neg A]=\neg[A]$和$u(A\to B)=[A\to B]=[A]\to[B]$知$u$为$(\neg,\to)$型同态，所以

$$u(A)=\overline{f}(u(p_1),\cdots,u(p_n))=1$$

在$[F]$中成立. 即$[A]=0'=[A\to A]$，或$A\sim(A\to A)$. 所以A是定理.

推论8.4.3 在**Łuk**系统中，$\models A$当且仅当$\vdash A$ $(A\in F(S))$.

习 题 8.4

1. 在MV单位区间中：

(i) 设$a\to b=1, b\to c=1$，求$a\to c$；

(ii) 设$a\to b=0.55, b\to c=0.55$，求$a\to c$；

(iii) 设$a\to b=0.5, b\to c=0.5$，求$a\to c$.

2. 在MV单位区间中设

$$b_1=a'\to a,\quad b_{n+1}=b'_n\to a,\quad n=1,2,\cdots$$

试证若$a>0$，则存在n使$b_n=1$.

3. 设$A\in F(S)$，$\alpha\in[0,1]$，如果对每个$v\in\Omega_L$恒有$v(A)\geqslant\alpha$，则称A为**α-重言式**.

(i) 举出一个$\frac{1}{2}$-重言式的例子,使它不是0.6-重言式.

(ii) 设$A=(p\to q\vee\neg q)\vee p$,试证$A$是0.75-重言式,且当$\alpha>0.75$时,$A$不是$\alpha$-重言式,这里$p,q$是不同的原子公式.

4. 设$\Gamma\subset F(S)$,$A\in F(S)$.如果

当$v(\Gamma)=\wedge\{v(B)\mid B\in\Gamma\}=1$时,$v(A)=1$,$v\in\Omega_L$,

则称Γ是A的**模型**,记作$\Gamma\models A$.试证

若$\Gamma\vdash A$,则$\Gamma\models A$.

5. 设$\Gamma=\{A\to B,A\to(B\to C)\}$,试证

(i) $\Gamma\cup\{A\}\vdash C$.

(ii) $\Gamma\models A\to C$,不成立,从而$\Gamma\vdash A\to C$也不成立.

6. 说明在系统**Łuk**中演绎定理不成立,即,从$\Gamma\cup\{A\}\vdash B$一般得不出$\Gamma\vdash A\to B$.但从$\Gamma\vdash A\to B$可得$\Gamma\cup\{A\}\vdash B$.

8.5 R_0 代数

8.5.1 R_0代数的定义及其基本性质

定义 8.5.1 设M是$(\neg,\vee,\to)$型代数,如果M上有偏序$\leqslant$使$(M,\leqslant)$成为有界分配格,且$\vee$是关于序$\leqslant$的上确界运算,$\neg$是关于序$\leqslant$的逆序对合对应,且:

(M1) $\neg a\to\neg b=b\to a$.

(M2) $1\to a=a$, $a\to a=1$.

(M3) $b\to c\leqslant(a\to b)\to(a\to c)$.

(M4) $a\to(b\to c)=b\to(a\to c)$.

(M5) $a\to b\vee c=(a\to b)\vee(a\to c)$,$a\to b\wedge c=(a\to b)\wedge(a\to c)$.

(M6) $(a\to b)\vee((a\to b)\to\neg a\vee b)=1$.

这里1是$(M,\leqslant)$中的最大元,则称M为**R_0代数**.

以下常用a'表示$\neg a$.又,由$'$为逆序对合对应知De Morgan对偶律成立[17],即$(a\vee b)'=a'\wedge b'$,$(a\wedge b)'=a'\vee b'$.

例 8.5.1 设B是Boole代数,在B中规定$a\to b=a'\vee b$.B自然是有界分配格.又

(i) $a'\to b'=(a')'\vee b'=b'\vee a=b\to a$.(M1)成立.

(ii) $1\to a=1'\vee a=0\vee a=a$, $a\to a=a'\vee a=1$.(M2)成立.

(iii) $(a\to b)\to(a\to c)=(a'\vee b)'\vee(a'\vee c)=(a\wedge b')\vee a'\vee c$

$=(a\vee a'\vee c)\wedge(b'\vee a'\vee c)=b'\vee c\vee a'$

$\geqslant b'\vee c=b\to c$.(M3)成立.

(iv) $a \to (b \to c) = a' \vee (b' \vee c) = b' \vee (a' \vee c) = b \to (a \to c)$. (M4) 成立.

(v) $a \to b \vee c = a' \vee b \vee c = (a' \vee b) \vee (a' \vee c) = (a \to b) \vee (a \to c)$. 又, $a \to b \wedge c = a' \vee (b \wedge c) = (a' \vee b) \wedge (a' \vee c) = (a \to b) \wedge (a \to c)$. (M5) 成立.

(vi) $(a \to b) \vee ((a \to b) \to a' \vee b) = ((a' \vee b) \vee (a' \vee b)') \vee a' \vee b = 1 \vee a' \vee b = 1$. (M6) 成立.

所以 Boole 代数是 R_0 代数.

例 8.5.2　在单位区间[0,1]上规定 $a' = 1 - a$, $a \vee b = \max\{a,b\}$, 且

$$a \to b = R_0(a,b) = \begin{cases} 1, & a \leqslant b, \\ a' \vee b, & a > b. \end{cases}$$

则[0,1]成为 R_0 代数, 称为 **R_0 单位区间**. 事实上, 只需证明定义 8.5.1 中的条件 (M1) ~ (M6) 成立.

(i) 当 $a' \leqslant b'$ 时 $b \leqslant a$, 所以　$a' \to b' = 1 = b \to a$. 当 $a' > b'$ 时 $b > a$, 这时仍有

$$a' \to b' = (a')' \vee b' = b' \vee a = b \to a.$$

所以(M1) 成立.

(ii) 当 $a < 1$ 时 $1 \to a = 1' \vee a = a$ 成立. 当 $a = 1$ 时仍有 $1 \to a = a$. 又, $a \to a = 1$ 显然成立. (M2) 成立.

(iii) 因为当 $a \leqslant c$ 时 $a \to c = 1$ 从而(M3) 显然成立, 所以可设 $a > c$. 以 e 记 $(a \to b) \to (a \to c)$. 这时若 $b \leqslant c$, 则 $a' \vee b \leqslant a' \vee c$ 从而 $e = a' \vee b \to a' \vee c = 1$, (M3) 成立. 若 $b > c$, 则 $b \to c = b' \vee c$. 这时若 $a \leqslant b$, 则 $a' \geqslant b'$. $e = 1 \to (a \to c) = a' \vee c \geqslant b' \vee c$. 从而(M3) 成立. 若 $a > b$, 则 $e = a' \vee b \to a' \vee c$. 不妨设 $a' \vee b > a' \vee c$, 那么 $a' < b$, 从而 $e = a' \vee b \to a' \vee c = b \to a' \vee c \geqslant b \to c$. 总之 $e \geqslant b \to c$. 这就证明了(M3).

(iv) 由对称性知只需证明 $a \to (b \to c) \leqslant b \to (a \to c)$. 若 $a > b \to c$, 则 $a \to (b \to c) = a' \vee (b' \vee c) = b' \vee (a' \vee c) \leqslant b \to (a \to c)$. 若 $a \leqslant b \to c$, 则当 $b \leqslant c$ 时 $b \leqslant a' \vee c \leqslant a \to c$ 从而 $b \to (a \to c) = 1 \geqslant a \to (b \to c)$. 当 $b > c$ 时有 $a \leqslant b' \vee c$. 这时若 $a \leqslant c$, 则 $b \to (a \to c) = 1 \geqslant a \to (b \to c)$, 若 $a \leqslant b'$, 则 $b \leqslant a' \leqslant a' \vee c \leqslant a \to c$ 仍有 $b \to (a \to c) = 1 \geqslant a \to (b \to c)$. (M4) 成立.

(v) 由于 $x \to y$ 关于 y 单调递增, 且[0,1]中任二元 b 与 c 可比较大小, 由此容易证明(M5) 成立.

(vi) 不妨设 $a > b$. 这时由 $a' \vee b = a \to b$ 知(M6) 成立.

所以 R_0 单位区间是 R_0 代数.

例 8.5.3　MV 单位区间不是 R_0 代数. 事实上, 令 $a = 0.6$, $b = 0.4$, 则 $a \to b$

$=0.8,(a\to b)\to a'\vee b=0.8\to 0.4=0.6$,所以(M6)不成立.

命题 8.5.1　设 M 是 R_0 代数,$a,b,c\in M$,则以下性质成立.

(P1) $a\to b=1$　当且仅当　$a\leqslant b$.

(P2) $a\leqslant b\to c$　当且仅当　$b\leqslant a\to c$.

(P3) $a\vee b\to c=(a\to c)\wedge(b\to c),a\wedge b\to c=(a\to c)\vee(b\to c)$.

(P4) 若 $b\leqslant c$,则 $a\to b\leqslant a\to c$.若 $a\leqslant b$,则 $b\to c\leqslant a\to c$.

(P5) $a\to b\geqslant a'\vee b$.

(P6) $(a\to b)\vee(b\to a)=1$.

(P7) $a\wedge a'\leqslant b\vee b'$.

(P8) $a\to(b\to a)=1$.

(P9) $a\to(a'\to b)=1$.

(P10) $a\vee b\leqslant((a\to b)\to b)\wedge((b\to a)\to a)$.

(P11) $a\to b\leqslant a\vee c\to b\vee c,a\to b\leqslant a\wedge c\to b\wedge c$.

(P12) $a\to b\leqslant(a\to c)\vee(c\to b)$.

证明　(i) 设 $a\to b=1$,则由(M1),(M3)和(M2)得

$a=1\to a=a'\to 0\leqslant(b'\to a')\to(b'\to 0)=(a\to b)\to(1\to b)=1\to b=b.$

反过来,设 $a\leqslant b$,则 $b=a\vee b$,所以由(M5)和(M2)得

$$a\to b=a\to a\vee b=(a\to a)\vee(a\to b)=1.$$

这就证明了(P1).

(ii) 由(M4)和(P1)立即得出(P2).

(iii) $a\vee b\to c=c'\to(a\vee b)'=c'\to a'\wedge b'=(c'\to a')\wedge(c'\to b')=(a\to c)\wedge(b\to c)$.

类似可证 $a\wedge b\to c=(a\to c)\vee(b\to c)$.所以(P3)成立.

(iv) (P4)是(M5)和(P3)的直接推论.

(v) 因为 $a'=a\to 0\leqslant a\to b,b=1\to b\leqslant a\to b$,所以(P5)成立.

(vi) 由(M5)知 $a\to b=a\to a\wedge b,b\to a=b\to a\wedge b$,所以由(P3)得

$(a\to b)\vee(b\to a)=(a\to a\wedge b)\vee(b\to a\wedge b)=a\wedge b\to a\wedge b=1.$

所以(P6)成立.

(vii) 由(M5)和(P3)得

$a\wedge a'\to b\vee b'=(a\to b)\vee(a'\to b)\vee(a\to b')\vee(a'\to b')$

$\geqslant(a\to b)\vee(b\to a)=1.$

所以(P7)成立.

(viii) 因为 $a=1\to a\leqslant b\to a$,所以由(P1)知(P8)成立.

(ix) 由(P8)和 $a'\to b=b'\to a''=b'\to a$ 知(P9)成立.

(x) 因为$a\to((b\to a)\to a)=1$,所以由(P1)得$a\leqslant(b\to a)\to a$. 又,由(M4)和(M2)得$a\to((a\to b)\to b)=(a\to b)\to(a\to b)=1$,所以由(P1)得$a\leqslant(a\to b)\to b$. 由此得$a\leqslant((a\to b)\to b)\wedge((b\to a)\to a)$. 同理可证$b\leqslant((a\to b)\to b)\wedge((b\to a)\to a)$,所以(P10)成立.

(xi) 由(P10)有$a\to((a\to b)\to b)=1$,由(P8)有$c\to((a\to b)\to c)=1$. 所以由(P3)和(M5)得

$$a\vee c\to((a\to b)\to b\vee c)=1.$$

再由(M4)和(P1)即得(P11)中的第一个不等式. 类似地可证第二个不等式也成立.

(xii) 由(M5),(P11)和(P3)并注意M是分配格,得

$$\begin{aligned}a\to b&\leqslant a\vee c\to b\vee c=(a\vee c\to b)\vee(a\vee c\to c)\\&=((a\to b)\wedge(c\to b))\vee((a\to c)\wedge(c\to c))\\&=((a\to b)\wedge(c\to b))\vee(a\to c)\\&=((a\to b)\vee(a\to c))\wedge((c\to b)\vee(a\to c))\leqslant(a\to c)\vee(c\to b).\end{aligned}$$

所以(P12)成立.

命题 8.5.2 设M是R_0代数. 在M中引入两个新的算子$\oplus$与$*$如下:

$$a\oplus b=a'\to b,\quad a*b=(a\to b')',\quad a,b\in M.\tag{8.5.1}$$

则

(P13) $(M,\oplus,0)$是以0为单位的交换半群.

(P14) $(M,*,1)$是以1为单位的交换半群.

(P15) $\oplus$与$*$都是单调算子.

(P16) $a*b\leqslant a\wedge b\leqslant a\vee b\leqslant a\oplus b$.

(P17) $a*b\leqslant c$ 当且仅当 $a\leqslant b\to c$.

(P18) $a*b\to c=a\to(b\to c),a\to(b\to a*b)=1$.

(P19) $a*a'=0,a\oplus a'=1$.

(P20) $na=2a$, $a^n=a^2$,这里$n\geqslant 2$

$$na=\underbrace{a\oplus\cdots\oplus a}_{n\text{个}},\quad a^n=\underbrace{a*\cdots*a}_{n\text{个}}.\tag{8.5.2}$$

(P21) $a*(b\vee c)=(a*b)\vee(a*c)$.

(P22) $(a\vee b)^n=a^n\vee b^n$.

(P23) $a^2\to(b\to c)=(a^2\to b)\to(a^2\to c)$.

证明 (i)(P13)与(P14)的证明类似,我们仅证明$*$是结合的,其余部分作为练习留给读者. 由式(8.5.1)和性质(M1)、(M4)即得

$$(a*b)*c=((a\to b')'\to c')'=(c\to(a\to b'))'=(a\to(c\to b'))'$$

$$= (a \to (b \to c'))' = (a \to (b * c)')' = a * (b * c).$$

(ii) $\oplus$ 与 $*$ 的单调性由性质(P4)和 $'$ 为逆序对合对应即得.

(iii) 由 $a * b \leqslant a * 1 = a$ 和 $a * b \leqslant 1 * b = b$ 即得 $a * b \leqslant a \wedge b$. 由 $a = a \oplus 0 \leqslant a \oplus b$ 和 $b = 0 \oplus b \leqslant a \oplus b$ 即得 $a \vee b \leqslant a \oplus b$. 所以(P16)成立.

(iv) $a * b \leqslant c$ 即 $(a \to b')' \leqslant c$, 也即 $(a \to b')' \to c = c' \to (a \to b') = a \to (c' \to b') = a \to (b \to c) = 1$, 所以 $a \leqslant b \to c$. 又, 相反的推理也成立. 所以(P17)成立.

(v)(P18)和(P19)容易验证, 证明留给读者.

(vi) 为证明性质(P20), 我们先证明一个等式:

$$(b \to (b \to b')) = (b \to b'). \tag{8.5.3}$$

事实上, 由(P8)知 $(b \to b') \to (b \to (b \to b')) = 1$, 再由(P1)就得出

$$(b \to b') \leqslant (b \to (b \to b')).$$

反过来, 由(M6)有

$(b \to b') \vee ((b \to b') \to b' \vee b') = 1$. 以 c 记 $(b \to b') \to b'$, 即

$$(b \to b') \vee c = 1. \tag{8.5.4}$$

由(P8)得

$$(b \to b') \to (c \to (b \to b')) = 1 \tag{8.5.5}$$

由(M3)得

$$((b \to b') \to b') \to ((b \to (b \to b')) \to (b \to b')) = 1.$$

即

$$c \to ((b \to (b \to b')) \to (b \to b')) = 1. \tag{8.5.6}$$

由式(8.5.5)和式(8.5.6)以及(P3)得

$$(b \to b') \vee c \to ((b \to (b \to b')) \to (b \to b')) = 1.$$

再由式(8.5.4)即得 $(b \to (b \to b')) \to (b \to b') = 1$. 所以由(P1)和已证不等式知式(8.5.3)成立.

现在证明(P20), 只需证明 $3a = 2a$ 和 $a^3 = a^2$. 事实上, 在式(8.5.3)中令 $b = a'$ 即可由式(8.5.1)得

$$3a = a \oplus (a \oplus a) = a' \to (a' \to a) = a' \to a = a \oplus a = 2a.$$

类似地, 在式(8.5.3)中令 $b = a$ 则由式(8.5.1)得

$$a^3 = (a * a) * a = ((a \to a')' \to a')' = (a \to a')' = a * a = a^2.$$

(vii) 设 $a, b, c \in M$, 则由式(8.5.1)和(M5)并注意 De Morgan 对偶律得

$$\begin{aligned} a * (b \vee c) = (a \to (b \vee c)')' = (a \to b' \wedge c')' &= ((a \to b') \wedge (a \to c'))' \\ &= (a \to b')' \vee (a \to c')' \\ &= (a * b) \vee (a * c). \end{aligned}$$

所以(P21)成立.

(viii) 由(M1)和(M3)得

$$a \to b = b' \to a' \leqslant (b \to b') \to (b \to a') = (b \to a')' \to (b \to b')'$$
$$= b * a \to b^2 = a * b \to b^2 \leqslant a * b \to a^2 \vee b^2.$$

同理有 $b \to a \leqslant a * b \to a^2 \vee b^2$. 又,由(P6)有 $(a \to b) \vee (b \to a) = 1$,所以 $a * b \to a^2 \vee b^2 = 1$,从而由(P1)知 $a * b \leqslant a^2 \vee b^2$.

由(P20)知只需就 $n = 2$ 的情形证明(P22). 这时由(P21)得

$$(a \vee b)^2 = (a \vee b) * (a \vee b) = (a * a) \vee (a * b) \vee (b * a) \vee (b * b)$$
$$= (a * b) \vee (a^2 \vee b^2) = a^2 \vee b^2.$$

所以(P22)成立.

(ix) 由(M3)知 $b \to c \leqslant (a^2 \to b) \to (a^2 \to c)$,所以由(P4)、(M4)、(P18)和(P20)得

$$a^2 \to (b \to c) \leqslant a^2 \to ((a^2 \to b) \to (a^2 \to c))$$
$$= (a^2 \to b) \to (a^2 \to (a^2 \to c))$$
$$= (a^2 \to b) \to (a^4 \to c)$$
$$= (a^2 \to b) \to (a^2 \to c).$$

另一方面,由 $a^2 \to b \geqslant b$,(P4)和(M4)知

$$(a^2 \to b) \to (a^2 \to c) \leqslant b \to (a^2 \to c) = a^2 \to (b \to c).$$

所以(P23)成立.

8.5.2 R_0 代数中的 MP 滤子

定义 8.5.2 设 M 是 R_0 代数,$F \subset M$.

(i) 如果 $1 \in F$,且 F 对 MP 运算封闭,即,当 $a, a \to b \in F$ 时 $b \in F$,则称 F 为 **MP 滤子**.

(ii) 如果 F 是 MP 滤子,且当 $a \vee b \in F$ 时 $a \in F$ 或 $b \in F$,则称 F 为**素滤子**.

例 8.5.4 设 M 是 R_0 单位区间,则$(\frac{1}{2}, 1]$是 MP 滤子,并且是素滤子. 但$[\frac{1}{2}, 1]$不是 MP 滤子,因为,比如,$\frac{1}{2} \in [\frac{1}{2}, 1]$,$\frac{1}{2} \to \frac{1}{3} \in [\frac{1}{2}, 1]$,但$\frac{1}{3} \notin [\frac{1}{2}, 1]$. 又设 $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1]$,则$(\alpha, 1]$与$[\alpha, 1]$都是素滤子.

命题 8.5.3 设 M 是 R_0 代数,$F \subset M$.

(i) F 是 MP 滤子当且仅当 $F \neq \phi$,F 是上集,即当 $a \in F$,$b \geqslant a$ 时 $b \in F$,且 F 对 $*$ 运算封闭.

(ii) MP 滤子对交运算 $\wedge$ 封闭,且包含 1,从而是通常意义下的滤子.

(iii) MP 滤子 F 是素滤子当且仅当对 M 中任二元 a 与 b 有 $a \to b \in F$ 或 $b \to a \in F$.

证明 (i) 设 F 是 MP 滤子,则由 $1 \in F$ 知 $F \neq \phi$. 又,设 $a \in F$ 且 $b \geqslant a$,则由 $a \to b = 1 \in F$ 知 $b \in F$,所以 F 是上集. 再设 $a, b \in F$,则由 $a \to (b \to a * b) = 1$

即得 $a*b\in F$,即 F 对 $*$ 封闭.反过来,设 $F\neq\phi$.由 F 为上集知 $1\in F$.设 $a,a\to b\in F$,则 $a*(a\to b)\in F$.由(P17)和 $a\to b\leqslant a\to b$ 知 $a*(a\to b)\leqslant b$,所以由 F 为上集知 $b\in F$.从而 F 为 MP 滤子.

(ii) 由(P16)知 $a*b\leqslant a\wedge b$.所以由 MP 滤子 F 为上集以及对 $*$ 封闭知 F 也对 $\wedge$ 封闭.

(iii) 设 F 是素滤子.因为由(P6)知 $(a\to b)\vee(b\to a)=1\in F$,所以由素滤子的定义知 $a\to b\in F$ 或 $b\to a\in F$.反过来,设 F 是 MP 滤子且对 M 中任二元 a 与 b 有 $a\to b\in F$ 或 $b\to a\in F$.如果 $a\vee b\in F$,则由 F 为上集和(P10)知 $(a\to b)\to b\in F$,$(b\to a)\to a\in F$,所以若 $a\to b\in F$,则 $b\in F$.若 $b\to a\in F$,则 $a\in F$.可见 F 是素滤子.

定义 8.5.3 设 M 是 R_0 代数,$A\subset M$.则所有包含 A 的 MP 滤子之交显然是包含 A 的最小 MP 滤子,称为由 **A 生成的 MP 滤子**,记作$[A)$.

命题 8.5.4 设 M 是 R_0 代数,A 是 M 的非空子集,则

$$[A)=\{x\in M\mid \text{存在 } n\in N \text{ 和 } a_1,\cdots,a_n\in A \text{ 使 } a_1*\cdots*a_n\leqslant x\}. \tag{8.5.7}$$

证明 式(8.5.7)右边的集显然是上集且对运算 $*$ 封闭,所以是 MP 滤子.又,任一包含 A 的 MP 滤子都包含这个集,所以它就是$[A)$.

命题 8.5.5 设 M 是 R_0 代数,$a\in M$,$a\neq 1$.则 M 中有素滤子 F 使 $a\notin F$.

证明 以 $\mathscr{F}$ 表示 M 中全体不含 a 的 MP 滤子之集.因为$\{1\}$是 MP 滤子且$\{1\}\in\mathscr{F}$,所以 $\mathscr{F}$ 非空.$\mathscr{F}$ 按包含序 $\subset$ 构成一个偏序集,设$\{F_i\mid i\in I\}$是 $\mathscr{F}$ 中的链,则易证 $\bigcup\{F_i\mid i\in I\}$ 是 MP 滤子且为这个链的上界.所以由 Zorn 引理知 $\mathscr{F}$ 中有一个极大元 F^*.F^* 就是 M 中不含 a 的素滤子.

事实上,若不然,则 M 中有元 b,c 使 $b\to c$ 与 $c\to b$ 都不属于 F^*.作 F_1,F_2 如下:

$$F_1=\{x\in M\mid \exists y\in F^*,\exists n\in N \text{ 使 } y*(b\to c)^n\leqslant x\},$$

$$F_2=\{x\in M\mid \exists y\in F^*,\exists n\in N \text{ 使 } y*(c\to b)^n\leqslant x\}.$$

则 F_1 与 F_2 都是上集且都关于 $*$ 封闭,从而都是 MP 滤子,且分别包含 $1*(b\to c)=b\to c$ 和 $1*(c\to b)=c\to b$.因而 F_1 与 F_2 都真包含 F^*.以下只需证 F_1 与 F_2 之一属于 $\mathscr{F}$ 就可推出 F^* 不是极大元的矛盾.即以下只需证 $a\notin F_1$ 或 $a\notin F_2$.今反设 $a\in F_1$ 且 $a\in F_2$,则有 $y_1,y_2\in F^*$ 和 $n_1,n_2\in N$ 使

$$a\geqslant y_1*(b\to c)^{n_1},\quad a\geqslant y_2*(c\to b)^{n_2}. \tag{8.5.8}$$

令 $y=y_1\wedge y_2$,则 $y\in F^*$.令 $n=\max\{n_1,n_2\}$,则$(b\to c)^{n_1}\geqslant(b\to c)^n$,$(c\to b)^{n_2}\geqslant(c\to b)^n$.注意由(P22)和(P6)有$(b\to c)^n\vee(c\to b)^n=((b\to c)\vee(c\to b))^n=1$,则由(P21)和式(8.5.8)得

$$a\geqslant(y*(b\to c)^n)\vee(y*(c\to b)^n))$$

$$= y * ((b \to c)^n \vee (c \to b)^n) = y * 1 = y.$$

从而由 $y \in F^*$ 知 $a \in F^*$. 矛盾!

8.5.3 R_0 代数的完备性定理

现在我们来建立与 MV 代数的完备性定理相对应的关于 R_0 代数的完备性定理.

命题 8.5.6 设 M 是 R_0 代数, F 是 M 中的 MP 滤子. 在 M 上定义二元关系 $\sim_F$ 如下:

$$a \sim_F b \quad \text{当且仅当} \quad a \to b \in F \text{ 且 } b \to a \in F, \tag{8.5.9}$$

则(i) $\sim_F$ 是 M 上关于 $'$, $\vee$ 与 $\to$ 的同余关系, 且商代数 $M/F = M/\sim_F = \{[a]_F \mid a \in M\}$ 是 R_0 代数, 其中的偏序由下式确定:

$$[a]_F \leqslant [b]_F \quad \text{当且仅当} \quad a \to b \in F. \tag{8.5.10}$$

(ii) 若 F 是素滤子, 则 M/F 是全序 R_0 代数.

证明 (i) 容易证明 $\sim_F$ 是 M 上的等价关系. 又, 设 $a \sim_F b, c \sim_F d$, 则由 $a' \to b' = b \to a \in F$ 和 $b' \to a' = a \to b \in F$ 知 $a' \sim_F b'$. 又, 由 $a \to b \in F, c \to d \in F$ 和 F 为上集知 $a \to b \vee d \in F, c \to b \vee d \in F$. 所以由 F 关于 $\wedge$ 封闭得

$$a \vee c \to b \vee d = (a \to b \vee d) \wedge (c \to b \vee d) \in F.$$

同理可证 $b \vee d \to a \vee c \in F$, 所以 $a \vee c \sim_F b \vee d$. 最后, 由 $a \to b = b' \to a' \in F$ 和 $b' \to a' \leqslant (c' \to b') \to (c' \to a') = (b \to c) \to (a \to c)$ 知 $(b \to c) \to (a \to c) \in F$. 类似地有 $(a \to c) \to (b \to c) \in F$, 所以 $(a \to c) \sim_F (b \to c)$. 同理可证 $(b \to c) \sim_F (b \to d)$, 所以 $(a \to c) \sim_F (b \to d)$. 这就证明了 $\sim_F$ 是 M 上的 $(', \vee, \to)$ 型同余关系. 由此可知式(8.5.10)中关于 $\leqslant$ 的定义是合理的, 且易证 $\leqslant$ 确为 M/F 中的偏序, $[1]_F$ 与 $[0]_F$ 分别是 $(M/F, \leqslant)$ 的最大元与最小元, $[a]_F \vee [b]_F$ 是 $[a]_F$ 与 $[b]_F$ 的上确界. 又, 由 $\sim_F$ 是 $(', \vee, \to)$ 同余关系知条件(M1) ~ (M6) 成立. 所以 M/F 是 R_0 代数.

(ii) 设 $[a]_F, [b]_F \in M/F$. 若 F 为素滤子, 则 $a \to b \in F$ 或 $b \to a \in F$, 从而由式(8.5.10) 知 $[a]_F \leqslant [b]_F$ 或 $[b]_F \leqslant [a]_F$. 所以 M/F 是全序 R_0 代数.

命题 8.5.7 设 $\{M_i \mid i \in I\}$ 是一族 R_0 代数, $M = \prod_{i \in I} M_i$ 是其直积. 在 M 中点式地定义偏序 $\leqslant$ 以及 $'$, $\vee$ 和 $\to$. 则 M 构成一个 R_0 代数. 称为 $\{M_i \mid i \in I\}$ 的**乘积 R_0 代数**.

证明 可按坐标验证, 证明细节作为练习留给读者.

定义 8.5.4 设 M 是 R_0 代数, A 是 M 的非空子集. 如果 A 对运算 $'$, $\vee$ 和 $\to$ 封闭, 则称 A 为 M 的**子 R_0 代数**.

注 8.5.1 设 A 是 M 的子 R_0 代数, 则 $A \neq \phi$. 任取 $a \in A$, 则 $a \to a = 1 \in A$, $1' = 0 \in A$. 可见 $\{0,1\} \subset A$. 又, $\{0,1\}$ 对 $'$, $\vee$ 与 $\to$ 封闭, 可见 $\{0,1\}$ 是 M 的最小

子 R_0 代数.

定义 8.5.5　设 M_1 与 M_2 是 R_0 代数，$\varphi: M_1 \to M_2$ 是映射. 如果 φ 保运算 $'$，$\vee$ 与 $\to$，则称 φ 为**同态**. 如果 φ 还是双射，则称 φ 为**同构**，记作 $M_1 \overset{\varphi}{\cong} M_2$.

命题 8.5.8　每个 R_0 代数都同构于一族全序 R_0 代数的乘积 R_0 代数的某子 R_0 代数.

证明　设 M 是 R_0 代数，以 $\mathscr{F}$ 记 M 中的全体素滤子之集. 由命题 8.5.6(ii)，对每个 $F \in \mathscr{F}$，M/F 是一个全序 R_0 代数. 令

$\overline{M} = \prod\{M/F \mid F \in \mathscr{F}\}$，则 $\overline{M}$ 是 R_0 代数. 定义映射 $\varphi: M \to \overline{M}$ 如下：

$$\varphi: M \to \overline{M}, \quad \varphi(x) = ([x]_F)_{F\in\mathscr{F}},$$

即 $\varphi(x)$ 的 F- 坐标为 x 在 M/F 中所在的同余类 $[x]_F$，则由

$$\varphi(x') = ([x']_F)_{F\in\mathscr{F}} = ([x]_F{}')_{F\in\mathscr{F}} = [([x]_F)_{F\in\mathscr{F}}]' = (\varphi(x))',$$

$$\begin{aligned}\varphi(x \vee y) &= ([x \vee y]_F)_{F\in\mathscr{F}} = ([x]_F \vee [y]_F)_{F\in\mathscr{F}} \\ &= ([x]_F)_{F\in\mathscr{F}} \vee ([y]_F)_{F\in\mathscr{F}} = \varphi(x) \vee \varphi(y),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(x \to y) &= ([x \to y]_F)_{F\in\mathscr{F}} = ([x]_F \to [y]_F)_{F\in\mathscr{F}} \\ &= ([x]_F)_{F\in\mathscr{F}} \to ([y]_F)_{F\in\mathscr{F}} = \varphi(x) \to \varphi(y).\end{aligned}$$

知 φ 为同态. 又，设 $x \neq y$，则 $x \to y = 1$ 与 $y \to x = 1$ 不能都成立. 不妨设 $x \to y \neq 1$，则由命题 8.5.5 知有素滤子 $F \in \mathscr{F}$ 使 $x \to y \notin F$. 从而由式(8.5.10) 知 $[x]_F \neq [y]_F$，可见 $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. 令 $M^* = \varphi(M)$，易证 M^* 是 $\overline{M}$ 的子 R_0 代数. 显然 $M \overset{\varphi}{\cong} M^*$.

命题 8.5.9　设 M 是全序 R_0 代数，则

$$a \to b = \begin{cases} 1, & a \leqslant b, \\ a' \vee b, & a > b, \end{cases} \qquad a, b \in M.$$

证明　只需证当 $a > b$ 时，$a \to b = a' \vee b$. 事实上，由(M6) 知

$$(a \to b) \vee ((a \to b) \to a' \vee b) = 1.$$

所以由 M 为全序 R_0 代数以及 $a \to b \neq 1$ 知 $(a \to b) \to a' \vee b = 1$，即 $a \to b \leqslant a' \vee b$. 又，由(P5) 有 $a \to b \geqslant a' \vee b$. 所以 $a \to b = a' \vee b$.

定义 8.5.6　设 $x_1, \cdots, x_n$ 是 n 个不同的符号，$X = \{x_1, \cdots, x_n\}$，$F(X)$ 是由 X 生成的$(', \vee, \to)$ 型自由代数，这里 $'$ 为一元运算，$\vee$ 与 $\to$ 是二元运算. 设 $f(x_1, \cdots, x_n) \in F(X)$，则称形如

$$f(x_1, \cdots, x_n) = 1 \tag{8.5.11}$$

的等式为 R_0 **等式**. 这里 $=$ 与 1 都是符号. 设 M 是 R_0 代数，如果对 M 的任意 n 个元 $a_1, \cdots, a_n$ 恒有

$$\overline{f}(a_1, \cdots, a_n) = 1_M, \quad a_1, \cdots, a_n \in M, \tag{8.5.12}$$

这里 1_M 是 M 中的最大元，$=$ 为等号，且 $\overline{f}$ 作用于 $a_1, \cdots, a_n$ 的方式恰如 f 作用于

$x_1, \cdots, x_n$ 的方式,则称由式(8.5.11)表示的 **R_0 等式在 R_0 代数 M 中成立.**

显然,若 R_0 等式在 M 中成立,则也在 M 的每个子 R_0 代数中成立.

命题 8.5.10　设某 R_0 等式在 R_0 代数 M_1 中成立,M_2 与 M_1 同构,则此 R_0 等式也在 M_2 中成立.

证明　设 R_0 等式(8.5.11)在 M_1 中成立. $\varphi: M_1 \to M_2$ 为同构,则 $\varphi(1_{M_1}) = 1_{M_2}$. 又,$\varphi$ 保运算 $'$, $\vee$ 与 $\to$,所以由式(8.5.12)得

$$\overline{f}(\varphi(a_1), \cdots, \varphi(a_n)) = \varphi(\overline{f}(a_1, \cdots, a_n)) = \varphi(1_{M_1}) = 1_{M_2}.$$

由于 a_i 可取 M_1 中的任意值,$\varphi(a_i)$ 可取 M_2 中的任意值($i = 1, \cdots, n$),即

$$\overline{f}(b_1, \cdots, b_n) = 1_{M_2}, \quad b_1, \cdots, b_n \in M_2.$$

所以 R_0 等式(8.5.11)在 M_2 中成立.

命题 8.5.11　设 M 是全序 R_0 代数,若某 R_0 等式在 M 中不成立,则此 R_0 等式在 R_0 单位区间[0,1]中也不成立.

证明　设 M 是全序 R_0 代数,R_0 等式(8.5.11)在 M 中不成立,则 M 中有元 $a_1, \cdots, a_n$ 使式(8.5.12)不成立,设 $A = \{a_1, \cdots, a_n\}$,令 $M_0 = A \cup A' \cup \{0,1\}$,这里 $A' = \{x' \mid x \in A\}$,则由 M 为全序 R_0 代数知 M_0 是 M 的子 R_0 代数,且 R_0 等式(8.5.11)在 R_0 代数 M_0 中也不成立. 设 M_0 中含有偶数个元,则 M_0 形如 $\{0, b_1, \cdots, b_m, b_m', \cdots, b_1', 1\}$,这里 $0 < b_1 < \cdots < b_m < b_m' < \cdots < b_1' < 1$. 如果 M_0 中含有奇数个元,则 M_0 形如 $\{0, b_1, \cdots, b_m, c, b_m', \cdots, b_1', 1\}$,这里 $0 < b_1 < \cdots < b_m < c < b_m' < \cdots < b_1' < 1$ 且 $c = c'$. 由命题 8.5.9 知在两种情况下 M_0 都同构于 R_0 单位区间的一个子 R_0 代数 M^*. 所以由命题 8.5.10 知 R_0 等式(8.5.11)在 M^* 中不成立. 从而它也在 R_0 单位区间[0,1]中不成立.

命题 8.5.12(R_0 代数的完备性定理)　一个 R_0 等式在每个 R_0 代数中都成立当且仅当它在 R_0 单位区间[0,1]中成立.

证明　只需证明充分性. 考虑 R_0 等式(8.5.11). 设它在某 R_0 代数 M 中不成立. 由命题 8.5.8,M 同构于一族全序 R_0 代数 $\{M_i \mid i \in I\}$ 的直积 $\overline{M} = \prod\{M_i \mid i \in I\}$ 的子 R_0 代数 M^*. 由命题8.5.10 知这时式(8.5.11)在 M^* 中不成立,从而也在 $\overline{M}$ 中不成立. 即,有 $a_1, \cdots, a_n \in \overline{M}$ 使

$$\overline{f}(a_1, \cdots, a_n) \neq 1_{\overline{M}},$$

这里 $a_k = ((a_k)_i)_{i \in I}$. 因为在乘积 R_0 代数 $\overline{M}$ 中各运算都是点式地定义的,即按坐标定义的,所以有标号 $i \in I$ 使

$$\overline{f}((a_1)_i, \cdots, (a_n)_i) \neq 1_{M_i},$$

这表明式(8.5.11)在全序 R_0 代数 M_i 中不成立,所以由命题 8.5.11 知式(8.5.11)也在 R_0 单位区间[0,1]中不成立.

习　题　8.5

1. 设 $0 = a_0 \leqslant a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_{2n} = 1$. 令 $M = \{a_i \mid i = 0,1,\cdots,2n\}$. 在 M 中规定

$$a_i{}' = a_{2n-i}(i = 0,1,\cdots,n), a_i \to a_j = \begin{cases} 1, & i \leqslant j, \\ a_i{}' \vee a_j, & i > j \end{cases} \quad (0 \leqslant i,j \leqslant 2n).$$

试证 M 构成一个 R_0 代数.

2. 举例说明在 R_0 代数中 $a \vee b = (a \to b) \to b$ 不必成立.

3. 在$[0,1]^2$ 中规定$(a,b) \leqslant (c,d)$ 当且仅当 $a \leqslant c, b \leqslant d$, $(a,b)' = (a',b') = (1-a,1-b)$, $(a,b) \to (c,d) = (R_0(a,c), R_0(b,d))$, 则$[0,1]^2$ 构成一个 R_0 代数 M. 求在 M 中由单点集 $A = \{(0.3,0.8)\}$ 生成的 MP 滤子.

4. 设 F 是 R_0 代数 M 中的滤子，试证：

$$\text{若 } a \to b \in F, b \to c \in F, \text{则 } a \to c \in F.$$

5. 设$\{M_i \mid i \in I\}$ 是一族 R_0 代数，$M = \prod_{i \in I} M_i$ 是其直积，在 M 中点式地定义 $\leqslant$, $'$, $\vee$ 和 $\to$，试证 M 构成一个 R_0 代数.

6. 设 M_1, M_2 是 R_0 代数，$\varphi: M_1 \to M_2$ 为同态，试证 $\varphi(M_1)$ 是 M_2 的子 R_0 代数.

7. 设 M 是全序 R_0 代数，A 是 M 的非空子集，令 $A' = \{a' \mid a \in A\}$. 试证 $B = A \cup A' \cup \{0, 1\}$ 是 M 中包含 A 的最小子 R_0 代数，即，B 是由 A 生成的子 R_0 代数.

8. (i) 试证在全序 R_0 代数中，下式成立：

$$a \vee b = ((a \to b) \to b) \wedge ((b \to a) \to a). \tag{8.5.13}$$

(ii) 试证在任何 R_0 代数中式(8.5.13)都成立.

8.6　命题演算系统 $\mathscr{L}^*$

8.6.1　语义理论

在 Łukasiewicz 命题演算系统中，有两个基本的逻辑连接词，即 $\neg$ 与 $\to$，还可将$(A \to B) \to B$ 简记为 $A \vee B$ 以引入逻辑连接词 $\vee$. 这时 $\vee$ 可通过 $\to$ 而表达，因而$\{\neg, \to, \vee\}$ 中的连接词不是相互独立的. 为将 Fuzzy 推理纳入于形式化的逻辑框架之中，我们引入了命题演算系统 $\mathscr{L}^*$，其中 $\neg$, $\to$ 与 $\vee$ 为相互独立的逻辑连接词①. 本节于第 2 部分中对 $\mathscr{L}^*$ 作了简化.

定义 8.6.1　设 $S = \{p_1, p_2, \cdots\}$, $F(S)$ 是由 S 生成的$(\neg, \vee, \to)$型自由代数，称 $F(S)$ 中的元为 $\mathscr{L}^*$ 系统中的**公式**(或**命题**)，称 S 中的元为 $\mathscr{L}^*$ 系统中的**原子公式**(或**原子命题**).

注意在系统 $\mathscr{L}^*$ 中 $A \vee B$ 与$(A \to B) \to B$ 是不同的公式，但约定 $A \wedge B$ 表示 $\neg(\neg A \vee \neg B)$ 仍然有效.

---

① 王国俊. Fuzzy 命题演算的一种形式演绎系统. 科学通报，42(1997)，10：1041 ～ 1045.

定义 8.6.2　设 $v:F(S)\to[0,1]$ 是映射，这里$[0,1]$是 R_0 单位区间，若 v 是$(\neg,\vee,\to)$型同态，即

$$v(\neg A)=\neg v(A)=1-v(A),$$
$$v(A\vee B)=v(A)\vee v(B)=\max\{v(A),v(B)\},$$
$$v(A\to B)=v(A)\to v(B)=R_0(v(A),v(B)),\tag{8.6.1}$$

则称 v 为 $F(S)$ 在 $\boldsymbol{R_0}$ **单位区间**$[\mathbf{0,1}]$**中的赋值**，简称 v 为**赋值**. $F(S)$ 的全体赋值之集记作 $\bar{\Omega}$.

注 8.6.1　因为 $F(S)$ 是由 S 生成的自由代数，所以每个赋值 v 由它在 S 上的限制 $v\mid S$ 完全确定. 可见$[0,1]$中的一个序列$(a_1,a_2,\cdots)$决定 $F(S)$ 的一个赋值，这里 $a_n=v(p_n)(n=1,2,\cdots)$. 由此可见 $\bar{\Omega}$ 的势等于$[0,1]^\omega$ 的势，也即连续统的势 c，$|\bar{\Omega}|=c$.

定义 8.6.3　设 $A,B\in F(S)$.

(i) 如果对每个 $v\in\bar{\Omega}$ 均有 $v(A)=1$，则称 A 为**重言式**，记作 $\models A$. 如果对每个 $v\in\bar{\Omega}$ 均有 $v(A)=0$，则称 A 为**矛盾式**.

(ii) 如果对每个 $v\in\bar{\Omega}$ 均有 $v(A)=v(B)$，则称 A 与 B **逻辑等价**，记作 $A\approx B$.

例 8.6.1　设 $A,B,C\in F(S)$.

(i) 由式(8.6.1)立即看出

$$\neg(\neg A)\approx A,\quad A\vee B\approx B\vee A.\tag{8.6.2}$$

(ii) 由 R_0 代数的性质(M1)、(P3)和式(8.6.1)知

$$\neg A\to\neg B\approx B\to A,\quad A\vee B\to C\approx(A\to C)\wedge(B\to C),$$
$$A\wedge B\to C\approx(A\to C)\vee(B\to C).\tag{8.6.3}$$

(iii) 由 R_0 代数的性质(M4)、(M6)和式(8.6.1)知以下二式为重言式：

$$(A\to(B\to C))\to(B\to(A\to C)),(A\to B)\vee((A\to B)\to\neg A\vee B).\tag{8.6.4}$$

例 8.6.2　设 $A,B\in F(S)$，则

$$A\vee B\approx((A\to B)\to B)\wedge((B\to A)\to A).\tag{8.6.5}$$

证明　设 $v\in\bar{\Omega}$，分别以 a 与 b 记 $v(A)$ 与 $v(B)$，分别用 G 与 H 记公式$(A\to B)\to B$ 与$(B\to A)\to A$，则由式(8.6.1)知 $v(A\vee B)=\max\{a,b\}$. 又，由 $G\wedge H=\neg(\neg G\vee\neg H)$ 知 $v(G\wedge H)=1-\max\{1-v(G),1-v(H)\}=\min\{v(G),v(H)\}$. 若 $a<b$，则 $v(G)=(a\to b)\to b=1\to b=b$，且由 R_0 代数的性质有

$$\begin{aligned}v(H)&=(b\to a)\to a=b'\vee a\to a\\&=(b'\to a)\wedge(a\to a)=b'\to a\\&=a'\to b\geqslant b,\end{aligned}$$

所以 $v(G\wedge H)=b$. 同理可证当 $b<a$ 时 $v(G\wedge H)=a$. 又，当 $a=b$ 时显然 $v(G$

$\wedge H) = (a \to a) \to a = a$. 综上所述知 $v(G \wedge H) = \max\{a,b\} = v(A \vee B)$. 由 v 的任意性知式(8.6.5)成立.

例 8.6.3　设 $A,B,C \in F(S)$，则以下各式为重言式：

(i) $A \to (B \to A \wedge B)$.

(ii) $(B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$.

证明　设 $v \in \bar{\Omega}$，分别以 a,b 和 c 记 $v(A)$，$v(B)$ 和 $v(C)$.

(i) 由上例中的推演 $v(A \wedge B) = \min\{v(A),v(B)\} = a \wedge b$. 所以由 R_0 代数的性质(M5)和(P8)得

$$v(A \to (B \to A \wedge B)) = a \to (b \to a \wedge b) = a \to (b \to a) \wedge (b \to b)$$
$$= a \to (b \to a) = 1.$$

由 v 的任意性知 $A \to (B \to A \wedge B)$ 为重言式.

(ii) 由 R_0 代数的性质(P1)知只需证 $v(B \to C) \leqslant v((A \to B) \to (A \to C))$，即 $b \to c \leqslant (a \to b) \to (a \to c)$，而这正是性质(M3). 所以 $(B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ 为重言式.

从语义的角度对一个公式进行评价借助了“打分表”$[0,1]$和“裁判”v. 由于如今的打分表为$[0,1]$，其中除1与0外尚含有非常多其他的真值，所以只限于考虑由1与0两个值以及让全体裁判出动所得出的重言式与矛盾式的概念是太狭窄了，下面我们考虑1与0之外的真值并允许只有部分裁判出动所得的广义重言式概念.

定义 8.6.4　设 $\alpha \in [0,1]$，$\Sigma \subset \bar{\Omega}$，$A \in F(S)$. 如果对 Σ 中的每个赋值 v 恒有 $v(A) \geqslant \alpha$，则称 A 为**Σ-(α-重言式)**，这时若有 $v \in \Sigma$ 使 $v(A) = \alpha$，则称 A 为**可达Σ-(α-重言式)**. 当 $\alpha = 1$ 时称 A 为**Σ-重言式**. 当 $\Sigma = \bar{\Omega}$ 时，Σ-(α-重言式)简称为**α-重言式**.

例 8.6.4　(i) 设 Σ 由只取1与0两个真值的全部赋值组成，且 $\alpha = 1$，则 Σ-(α-重言式)就是经典二值逻辑中的重言式.

(ii) 设 Σ 由只取 $1, \frac{1}{2}$ 和0三个真值的全部赋值组成，令 $A = p_1 \vee \neg p_1$，则 A 是 Σ-$\left(\frac{1}{2}\text{-重言式}\right)$. 这一点可由 $v(A) = \max\{v(p_1), 1 - v(p_1)\}$ 直接看出.

(iii) 设 Σ 由所有取真值 $0, \frac{1}{1000}, \frac{2}{1000}, \cdots, \frac{999}{1000}, 1$ 的赋值组成，$A = p_1 \vee \neg p_1$，则可像(ii)中一样证明 A 是可达Σ-$\left(\frac{1}{2}\text{-重言式}\right)$. 又，令 $B = (p_2 \to A) \vee p_2$，任取 $v \in \Sigma$. 若 $v(p_2) \leqslant \frac{500}{1000} = \frac{1}{2}$，则 $v(p_2) \leqslant v(A)$，从而 $v(B) = 1$. 若 $v(p_2) > \frac{500}{1000}$，则 $v(B) \geqslant v(p_2) \geqslant \frac{501}{1000}$. 所以 B 是可达Σ-$\left(\frac{501}{1000}\text{-重言式}\right)$. 若再令 $C = (p_3$

$\to B) \vee p_3$，则类似可证 C 是可达 Σ-$\left(\frac{502}{1000}\text{-}\ 重言式\right)$. 一般地，设 A 是可达 Σ-(α- 重言式)，这里 $\frac{1}{2} \leqslant \alpha < 1$. 取不在 A 中出现的原子公式 p，令 $B = (p \to A) \vee p$，则易证 B 是可达 Σ-(β- 重言式)，这里 $\beta = \alpha + \frac{1}{1000}$. 我们称从 A 到 B 的算法为**升级算法**.[①]

命题 8.6.1　设 $A, B, C \in F(S), \Sigma \subset \bar{\Omega}, \alpha, \beta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$，则

(i) 若 A 是 Σ-(α- 重言式)，$A \to B$ 是 Σ-(β- 重言式)，则 B 是 Σ-($\alpha \wedge \beta$- 重言式).

(ii) 若 $A \to B$ 是 Σ-(α- 重言式)，$B \to C$ 是 Σ-(β- 重言式)，则 $A \to C$ 是 Σ-($\alpha \wedge \beta$- 重言式).

证明　以(i)为例进行证明. 任取 $v \in \Sigma$，分别以 a 与 b 记 $v(A)$ 与 $v(B)$. 则由假设知 $a \geqslant \alpha, a \to b \geqslant \beta$. 所以 $a \wedge (a \to b) \geqslant \alpha \wedge \beta$. 以下只需证

$$a \wedge (a \to b) \leqslant b \qquad \left(a > \frac{1}{2}, a \to b > \frac{1}{2}\right). \tag{8.6.6}$$

事实上，若 $a \leqslant b$，则上式左方为 a，所以不等式成立. 若 $a > b$，则上式左方为 $a \wedge (a' \vee b) = (a \wedge a') \vee (a \wedge b)$. 由 $a > \frac{1}{2}$ 知 $a' < \frac{1}{2}$. 又，$a' \vee b > \frac{1}{2}$，所以 $b > \frac{1}{2} > a \wedge a'$. 加之 $b \geqslant a \wedge b$，所以

$$a \wedge (a \to b) = (a \wedge a') \vee (a \wedge b) \leqslant b.$$

注 8.6.2　在 **Łuk** 系统中，命题 8.6.1 不成立，请读者举出反例. 又，若 A 与 $A \to B$ 都是重言式，则由命题 8.6.1 知 B 是重言式，即 MP 保持重言式. 类似可证 HS 也保持重言式.

8.6.2　语构理论

定义 8.6.5　**形式系统** $\mathscr{L}^*$ 中的公理由以下形式的公式组成：

(L^*1) $A \to (B \to A \wedge B)$.

(L^*2) $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$.

(L^*3) $(A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$.

(L^*4) $(B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$.

(L^*5) $A \to \neg\neg A$.

(L^*6) $A \to A \vee B$.

(L^*7) $A \vee B \to B \vee A$.

(L^*8) $(A \to C) \wedge (B \to C) \to (A \vee B \to C)$.

---

① 王国俊. 修正的 Kleene 系统中的 Σ-(α- 重言式) 理论. 中国科学, E, 28(1998), 2: 146 ~ 152.

(L^*9) $(A \wedge B \to C) \to (A \to C) \vee (B \to C)$.

(L^*10) $(A \to B) \vee ((A \to B) \to \neg A \vee B)$.

$\mathscr{L}^*$ 中的推理规则为 MP. 以上 $A \wedge B$ 为 $\neg(\neg A \vee \neg B)$ 的简写.

$\mathscr{L}^*$ 中的概念如证明,定理,Γ- 结论,推演长度等均可按与定义 8.4.5 同样的方式去定义,符号也相同,如,$\vdash A$ 表示 A 是 $\mathscr{L}^*$ 中的定理,$\Gamma \vdash A$ 表示 A 是 Γ- 结论等. 又,第二章中的注 2.3.2 仍有效.

命题 8.6.2 在 $\mathscr{L}^*$ 中 HS 成立,即

$$\{A \to B, B \to C\} \vdash A \to C \tag{8.6.7}$$

证明 (1) $B \to C$ 假设

(2) $(B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ (L^*4)

(3) $(A \to B) \to (A \to C)$ (1),(2),MP

(4) $A \to B$ 假设

(5) $A \to C$ (3),(4),MP

例 8.6.5 以下各式都是 $\mathscr{L}^*$ 中的定理

(i) $\neg\neg A \to A$.

(ii) $A \wedge B \to A$.

(iii) $A \to (B \to A)$.

(iv) $A \to A$.

(v) $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$.

(vi) $A \wedge B \to B \wedge A$.

证明 (i) (1) $\neg A \to \neg\neg\neg A$ (L^*5)

(2) $(\neg A \to \neg\neg\neg A) \to (\neg\neg A \to A)$ (L^*2)

(3) $\neg\neg A \to A$ (1),(2),MP

(ii) (1) $\neg A \to \neg A \vee \neg B$ (L^*6)

(2) $\neg A \vee \neg B \to \neg\neg(\neg A \vee \neg B)$ (L^*5)

(3) $\neg A \to \neg\neg(\neg A \vee \neg B)$ (1),(2),HS

(4) $(\neg A \to \neg\neg(\neg A \vee \neg B)) \to (\neg(\neg A \vee \neg B) \to A)$ (L^*2)

(5) $A \wedge B \to A$ (3),(4),MP

(iii) (1) $A \wedge B \to A$ 定理

(2) $(A \wedge B \to A) \to ((B \to A \wedge B) \to (B \to A))$ (L^*4)

(3) $(B \to A \wedge B) \to (B \to A)$ (1),(2),MP

(4) $((B \to A \wedge B) \to (B \to A)) \to ((A \to (B \to A \wedge B)) \to (A \to (B \to A)))$ (L^*4)

(5) $(A \to (B \to A \wedge B)) \to (A \to (B \to A))$ (3),(4),MP

(6) $A \to (B \to A \wedge B)$ (L^*1)

(7) $A \to (B \to A)$ (5),(6),MP

(iv) (1) $A \to ((B \to \neg\neg B) \to A)$ 定理

(2) $(A \to ((B \to \neg\neg B) \to A)) \to ((B \to \neg\neg B) \to (A \to A))$ (L^*3)

(3) $(B \to \neg\neg B) \to (A \to A)$ (1),(2),MP

(4) $B \to \neg\neg B$ (L^*5)

(5) $A \to A$ (3),(4),MP

(v) (1) $(A \to B) \to ((\neg\neg A \to A) \to (\neg\neg A \to B))$ (L^*4)

(2) $((A \to B) \to ((\neg\neg A \to A) \to (\neg\neg A \to B))) \to$
$((\neg\neg A \to A) \to ((A \to B) \to (\neg\neg A \to B)))$ (L^*3)

(3) $(\neg\neg A \to A) \to ((A \to B) \to (\neg\neg A \to B))$ (1),(2),MP

(4) $\neg\neg A \to A$ 定理

(5) $(A \to B) \to (\neg\neg A \to B)$ (3),(4),MP

(6) $B \to \neg\neg B$ (L^*5)

(7) $(B \to \neg\neg B) \to ((\neg\neg A \to B) \to (\neg\neg A \to \neg\neg B))$ (L^*4)

(8) $(\neg\neg A \to B) \to (\neg\neg A \to \neg\neg B)$ (6),(7),MP

(9) $(A \to B) \to (\neg\neg A \to \neg\neg B)$ (5),(8),HS

(10) $(\neg\neg A \to \neg\neg B) \to (\neg B \to \neg A)$ (L^*2)

(11) $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ (9),(10),HS

(vi) (1) $\neg B \vee \neg A \to \neg A \vee \neg B$ (L^*7)

(2) $(\neg B \vee \neg A \to \neg A \vee \neg B) \to (\neg(\neg A \vee \neg B) \to \neg(\neg B \vee \neg A))$ 定理

(3) $\neg(\neg A \vee \neg B) \to \neg(\neg B \vee \neg A)$ (1),(2),MP

(4) $A \wedge B \to B \wedge A$ (3) 的简写

命题 8.6.3 设 $A,B,C,D \in F(S)$,则

(i) 若 $\vdash A$, $\vdash B$,则 $\vdash A \wedge B$.

(ii) 若 $\vdash A \to B$, $\vdash C \to D$,则 $\vdash A \vee C \to B \vee D$, $\vdash A \wedge C \to B \wedge D$.

证明 (i) (1) $A \to (B \to A \wedge B)$ (L^*1)

(2) A 假设

(3) $B \to A \wedge B$ (1),(2),MP

(4) B 假设

(5) $A \wedge B$ (3),(4),MP

(ii) (1) $A \to B$ 假设

(2) $B \to B \vee D$ (L^*6)

(3) $A \to B \vee D$ (1),(2),HS

(4) $C \to D$ 假设

(5) $D \to D \vee B$ (L* 6)

(6) $D \vee B \to B \vee D$ (L* 7)

(7) $D \to B \vee D$ (5),(6),HS

(8) $C \to B \vee D$ (4),(7),HS

(9) $(A \to B \vee D) \wedge (C \to B \vee D)$ (3),(8),定理

(10) $(A \to B \vee D) \wedge (C \to B \vee D) \to (A \vee C \to B \vee D)$ (L* 8)

(11) $A \vee C \to B \vee D$ (9),(10),MP

关于 $\vdash A \wedge C \to B \wedge D$ 的证明留给读者.

定义 8.6.6 设 $A,B \in F(S)$,如果 $\vdash A \to B$ 且 $\vdash B \to A$,则称 A 与 B **可证等价**,记作 $A \sim B$.

如,由例 8.6.5 知 $\neg\neg A \sim A, A \to B \sim \neg B \to \neg A, A \wedge B \sim B \wedge A$ 等.

命题 8.6.4 可证等价关系是 $F(S)$ 上的$(\neg, \vee, \to)$型同余关系,即:

(i) 若 $A \sim B$,则 $\neg A \sim \neg B$.

(ii) 若 $A \sim B, C \sim D$,则 $A \vee C \sim B \vee D$.

(iii) 若 $A \sim B, C \sim D$,则 $A \to C \sim B \to D$.

证明 (i) 设 $A \sim B$,则 $\vdash A \to B$,那么由例 8.6.5(v) 和 MP 即得 $\vdash \neg B \to \neg A$. 同理可证 $\vdash \neg A \to \neg B$. 所以 $\neg A \sim \neg B$.

(ii) 设 $A \sim B, C \sim D$,则 $\vdash A \to B, \vdash C \to D$. 则由命题 8.6.3(ii) 得 $\vdash A \vee C \to B \vee D$. 同理可证 $\vdash B \vee D \to A \vee C$. 所以 $A \vee C \sim B \vee D$.

(iii) 设 $A \sim B, C \sim D$,则由 $\vdash C \to D$ 和(L* 4)利用MP即得 $\vdash (A \to C) \to (A \to D)$. 同理,由 $\neg A \sim \neg B$ 从而 $\vdash \neg A \to \neg B$ 可得 $\vdash (\neg D \to \neg A) \to (\neg D \to \neg B)$. 再由 $\vdash (A \to D) \to (\neg D \to \neg A)$ 以及 $\vdash (\neg D \to \neg B) \to (B \to D)$ 利用两次 HS 即得 $\vdash (A \to D) \to (B \to D)$. 再次使用 HS 即得 $\vdash (A \to C) \to (B \to D)$. 同理可证相反的蕴涵式也是定理. 所以 $A \to C \sim B \to D$.

命题 8.6.5(等价代换定理) 设公式 A 由子公式 $B_1, \cdots, B_t$ 通过连接词 $\neg$, $\vee$ 与 $\to$ 连接而成,$A = f(B_1, B_2, \cdots, B_t)$. 如果 $C_1 \sim B_1$,则

$$A \sim f(C_1, B_2, \cdots, B_t). \tag{8.6.8}$$

证明 按子公式间连接词的个数 n 进行归纳证明(子公式中的连接词不计入).

(i) 设 $n = 0$,则 $t = 1, A = f(B_1) = B_1$. 这时由 $C_1 \sim B_1$ 得 $A \sim C_1 = f(C_1)$. 式(8.6.8) 成立.

(ii) 设 $n \leqslant k$ 时式(8.6.8) 成立,令 $n = k + 1$.

(1) 设 $A = f(B_1, B_2, \cdots, B_t) = \neg g(B_1, B_2, \cdots, B_t)$. 由归纳假设知

$$g(B_1, B_2, \cdots, B_t) \sim g(C_1, B_2, \cdots, B_t).$$

所以由命题 8.6.4 知式(8.6.8) 成立.

(2) 设 $A = f(B_1, B_2, \cdots, B_t) = g(B_1, B_2, \cdots, B_t) \vee h(B_1, B_2, \cdots, B_t)$，则 g 与 h 中各子公式间的连接词均不多于 k 个. 由归纳假设知

$$g(B_1, B_2, \cdots, B_t) \sim g(C_1, B_2, \cdots, B_t), h(B_1, B_2, \cdots, B_t) \sim h(C_1, B_2, \cdots, B_t),$$

所以由命题 8.6.4 知式(8.6.8) 成立.

(3) 设 $A = f(B_1, B_2, \cdots, B_t) = g(B_1, B_2, \cdots, B_t) \to h(B_1, B_2, \cdots, B_t)$，这时可像(2) 一样证明式(8.6.8).

连续使用代换定理 t 次可得

推论 8.6.1 设公式 A 由子公式 $B_1, \cdots, B_t$ 通过连接词 $\neg$，$\vee$ 与 $\to$ 连接而成，$A = f(B_1, \cdots, B_t)$. 如果 $C_i \sim B_i (i = 1, \cdots, t)$，则 $A \sim f(C_1, \cdots, C_t)$.

命题 8.6.6(可证等价定理) 设 $A, B, C \in F(S)$，则

(i) $\neg(A \vee B) \sim \neg A \wedge \neg B$,

$\neg(A \wedge B) \sim \neg A \vee \neg B$.

(ii) $(A \wedge B \to C) \sim (A \to C) \vee (B \to C)$.

(iii) $(A \to B \vee C) \sim (A \to B) \vee (A \to C)$.

(iv) $(A \vee B \to C) \sim (A \to C) \wedge (B \to C)$.

(v) $(A \to B \wedge C) \sim (A \to B) \wedge (A \to C)$.

(vi) $A \vee (B \vee C) \sim (A \vee B) \vee C$,

$A \wedge (B \wedge C) \sim (A \wedge B) \wedge C$.

(vii) $A \wedge (B \vee C) \sim (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$,

$A \vee (B \wedge C) \sim (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

证明 (i) 由等价代换定理得

$$\neg A \wedge \neg B = \neg(\neg\neg A \vee \neg\neg B) \sim \neg(A \vee B),$$

$$\neg(A \wedge B) = \neg(\neg(\neg A \vee \neg B)) \sim \neg A \vee \neg B.$$

(ii) 由(L^*9) 知只需证明

$$\vdash (A \to C) \vee (B \to C) \to (A \wedge B \to C).$$

(1) $\neg A \to \neg A \vee \neg B$ (L^*6)

(2) $(\neg A \to \neg A \vee \neg B) \to ((\neg C \to \neg A) \to (\neg C \to \neg A \vee \neg B))$ (L^*4)

(3) $(\neg C \to \neg A) \to (\neg C \to \neg A \vee \neg B)$ (1),(2),MP

(4) $(A \to C) \to (A \wedge B \to C)$ (3),等价代换

(5) $(B \to C) \to (B \wedge A \to C)$ 同(1) ~ (4)

(6) $(B \to C) \to (A \wedge B \to C)$ (5),等价代换

(7) $(A \to C) \vee (B \to C) \to (A \wedge B \to C)$ (4),(6),定理

(iii) 由(ii) 和等价代换定理得

$$(A \to B \vee C) \sim (\neg B \wedge \neg C \to \neg A) \sim (\neg B \to \neg A) \vee (\neg C \to \neg A)$$
$$\sim (A \to B) \vee (A \to C).$$

(iv) (1) $(A \vee B \to C) \to ((A \to A \vee B) \to (A \to C))$ (L^*4)

(2) $((A \vee B \to C) \to ((A \to A \vee B) \to (A \to C))) \to$
$((A \to A \vee B) \to ((A \vee B \to C) \to (A \to C)))$ (L^*3)

(3) $(A \to A \vee B) \to ((A \vee B \to C) \to (A \to C))$ (1),(2),MP

(4) $A \to A \vee B$ (L^*6)

(5) $(A \vee B \to C) \to (A \to C)$ (3),(4),MP

(6) $(B \vee A \to C) \to (B \to C)$ 同(1) ~ (5)

(7) $(A \vee B \to C) \to (B \to C)$ (6),等价代换

(8) $(A \vee B \to C) \to (A \to C) \wedge (B \to C)$ 命题 8.6.3(ii)

(v) 由(iv) 和等价代换定理得

$$(A \to B \wedge C) \sim (\neg B \vee \neg C \to \neg A) \sim (\neg B \to \neg A) \wedge (\neg C \to \neg A)$$
$$\sim (A \to B) \wedge (A \to C).$$

(vi) 只证明 $\vdash A \vee (B \vee C) \to (A \vee B) \vee C$,其余部分的证明留给读者.

(1) $A \to A \vee B$ (L^*6)

(2) $A \vee B \to (A \vee B) \vee C$ (L^*6)

(3) $A \to (A \vee B) \vee C$ (1),(2),HS

(4) $B \to A \vee B$ (L^*6),等价代换

(5) $A \vee B \to (A \vee B) \vee C$ (L^*6)

(6) $B \to (A \vee B) \vee C$ (4),(5),MP

(7) $C \to (A \vee B) \vee C$ (L^*6),等价代换

(8) $B \vee C \to (A \vee B) \vee C$ (6),(7),命题 8.6.3(ii)

(9) $A \vee (B \vee C) \to (A \vee B) \vee C$ (3),(8),命题 8.6.3(ii)

(vii) 只证明第一个可证等价式成立. 先证明

$$\vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \to A \wedge (B \vee C).$$

(1) $B \to B \vee C$ (L^*6)

(2) $A \to A$ 定理

(3) $A \wedge B \to A \wedge (B \vee C)$ (1),(2),命题 8.6.3(ii)

(4) $C \to C \vee B$ (L^*6)

(5) $C \to B \vee C$ (4),等价代换

(6) $A \wedge C \to A \wedge (B \vee C)$ (2),(5),命题 8.6.3(ii)

(7) $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \to A \wedge (B \vee C)$ (3),(6),命题 8.6.3(ii)

现在证明

$$\vdash (G \to H) \to (E \wedge G \to E \wedge H). \qquad (8.6.9)$$

事实上,由 $\vdash (G \to H) \to (G \to H) \vee (E \to H)$ 和$(G \to H) \vee (E \to H) \sim (E \wedge G \to H)$ 知 $\vdash (G \to H) \to (E \wedge G \to H)$. 又,若 K 为定理,显然 $K \wedge A \sim A$.

所以由 $\neg E \to \neg E \vee \neg G$ 为定理知

$$\begin{aligned}(E \wedge G \to H) &\sim (\neg H \to \neg E \vee \neg G) \\ &\sim (\neg E \to \neg E \vee \neg G) \wedge (\neg H \to \neg E \vee \neg G) \\ &\sim (\neg E \vee \neg H \to \neg E \vee \neg G) \\ &\sim (E \wedge G \to E \wedge H).\end{aligned}$$

所以式(8.6.9)成立.

最后只需证明

$$\vdash A \wedge (B \vee C) \to (A \wedge B) \vee (A \wedge C).$$

(1) $B \vee C \to B \vee C$ 定理

(2) $(B \vee C \to B) \vee (B \vee C \to C)$ (1),(iii),MP

(3) $(B \vee C \to B) \to (A \wedge (B \vee C) \to A \wedge B)$ 式(8.6.9)

(4) $(B \vee C \to C) \to (A \wedge (B \vee C) \to A \wedge C)$ 式(8.6.9)

(5) $(B \vee C \to B) \vee (B \vee C \to C) \to (A \wedge (B \vee C) \to A \wedge B)$
$\vee (A \wedge (B \vee C) \to A \wedge C)$ (3),(4) 命题 8.6.3(ii)

(6) $(A \wedge (B \vee C) \to A \wedge B) \vee (A \wedge (B \vee C) \to A \wedge C)$ (2),(5),MP

(7) $A \wedge (B \vee C) \to (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ (6),(iii),MP

由命题 8.6.4 知可证等价关系 $\sim$ 是 $F(S)$ 上的 $(\neg, \vee, \to)$ 型同余关系,所以 $F(S)$ 可以关于 $\sim$ 作商.

定义 8.6.7 $F(S)$ 关于可证等价关系 $\sim$ 的商 $\overline{F} = F(S)/\sim$ 是 $(\neg, \vee, \to)$ 型代数,叫 **$\mathscr{L}^*$-Lindenbaum 代数**.

命题 8.6.7 $\mathscr{L}^*$-Lindenbaum 代数 $\overline{F}$ 是 R_0 代数,其中的偏序关系 $\leqslant$ 由

$$\overline{A} \leqslant \overline{B} \quad 当且仅当 \quad \vdash A \to B \tag{8.6.10}$$

确定,且

$$\overline{A}' = \overline{\neg A}, \quad \sup\{\overline{A}, \overline{B}\} = \overline{A \vee B}. \tag{8.6.11}$$

证明 设 $A_1 \in \overline{A}, B_1 \in \overline{B}$,则 $\vdash A \to B$ 当且仅当 $\vdash A_1 \to B_1$,所以定义式(8.6.10)是合理的.易证 $\leqslant$ 是 $\overline{F}$ 上的偏序.又设 $A_1 \in \overline{A}$,则由 $\neg A_1 \sim \neg A$ 知 $\overline{\neg A_1} = \overline{\neg A}$,所以定义 $\overline{A}' = \overline{\neg A}$ 也是合理的.设 B 是 $F(S)$ 中的定理,则 $\vdash A \to B$ 对每个 $A \in F(S)$ 都成立,所以 $\overline{B}$ 是 $\overline{F}$ 中的最大元.类似可证 $\overline{B}'$ 是 $\overline{F}$ 中的最小元.

其次,由 $\vdash A \to A \vee B$ 和 $\vdash B \to A \vee B$ 和式(8.6.10)知 $\overline{A \vee B}$ 是 $\{\overline{A}, \overline{B}\}$ 的上界.设 $\overline{C}$ 是 $\{\overline{A}, \overline{B}\}$ 的任一上界,则由 $\vdash A \to C$ 与 $\vdash B \to C$ 即得 $\vdash A \vee B \to C$,从而 $\overline{A \vee B} \leqslant \overline{C}$.可见 $\overline{A \vee B}$ 是 $\{\overline{A}, \overline{B}\}$ 的上确界,即式(8.6.11)中的第二式成立.类似可证 $\overline{A \wedge B}$ 是 $\{\overline{A}, \overline{B}\}$ 的下确界.所以在 $(\overline{F}, \leqslant)$ 中,由作商而来的 $\vee$ 与 $\wedge$ 正是上、下确界运算.

最后,由 $(\neg A \to \neg B) \sim (B \to A)$ 知 $\overline{F}$ 满足 R_0 代数的条件(M1).由(L^*4)知 $\overline{F}$ 满足(M3),由(L^*3)知 $\overline{F}$ 满足(M4).由可证等价定理中的(iii)和(v)知 $\overline{F}$ 满足

(M5). 由(L* 10) 知 $\bar{F}$ 满足(M6). 又,易证 $\bar{F}$ 满足(M2),所以$(\bar{F}, \leqslant)$ 是 R_0 代数.

8.6.3 系统$\mathscr{L}^*$的完备性

命题 8.6.8(可靠性定理) 设 $A \in F(S)$. 若 A 是 $F(S)$ 中的定理,则 A 是 $F(S)$ 中的重言式,即

$$\text{若} \vdash A, \quad \text{则} \models A. \tag{8.6.12}$$

证明 首先证明 $\mathscr{L}^*$ 中的10条公理都是重言式. 事实上,由例8.6.3知(L* 1)和(L* 4)为重言式. 由例8.6.1知(L* 2),(L* 3),(L* 5),(L* 7)-(L* 10)为重言式. 又,易证(L* 6)是重言式,所以 $\mathscr{L}^*$ 中的公理都是重言式.

其次,由命题8.6.1知当 A 与 $A \to B$ 都是重言式时 B 是重言式,即MP保持重言式. 而 $\mathscr{L}^*$ 中的定理是由公理出发运用MP而得的公式,所以式(8.6.12)成立.

定义 8.6.8 设 $\bar{F}$ 是 $F(S)$ 关于可证等价关系 $\sim$ 的商代数,即,$\bar{F}$ 是 $\mathscr{L}^*$-Lindenbaum 代数,定义映射 $\varphi: F(S) \to \bar{F}$ 为 $\varphi(A) = \bar{A}$ $(A \in F(S))$,称 φ 为**典型映射**.

命题 8.6.9 典型映射 $\varphi: F(S) \to \bar{F}$ 是$(\neg, \vee, \to)$型同态.

证明 设 $A, B \in F(S)$,则

$$\varphi(\neg A) = \overline{\neg A} = \neg \bar{A} = \neg \varphi(A),$$

$$\varphi(A \vee B) = \overline{A \vee B} = \bar{A} \vee \bar{B} = \varphi(A) \vee \varphi(B),$$

$$\varphi(A \to B) = \overline{A \to B} = \bar{A} \to \bar{B} = \varphi(A) \to \varphi(B).$$

所以 φ 是$(\neg, \vee, \to)$型同态.

命题 8.6.10(系统 $\mathscr{L}^*$ 的完备性定理) 设 $A \in F(S)$,则 A 是 $\mathscr{L}^*$ 中的定理当且仅当 A 是重言式,即

$$\vdash A \quad \text{当且仅当} \quad \models A.$$

证明 由式(8.6.12)知只需证明

$$\text{若} \models A, \quad \text{则} \vdash A. \tag{8.6.13}$$

设 $A = f(p_1, \cdots, p_n)$. 若 $\models A$,则对每个 $v \in \bar{\Omega}$,

$$v(A) = \bar{f}(v(p_1), \cdots, v(p_n)) = 1, \quad v \in \bar{\Omega}, \tag{8.6.14}$$

这里 $\bar{f}$ 通过 $\neg$, $\vee$ 与 $\to$ 作用于 $v(p_1), \cdots, v(p_n)$ 的方式恰如 f 作用于 $p_1, \cdots, p_n$ 的方式. 因为$(v(p_1), \cdots, v(p_n))$可取$[0,1]^n$中的任意元,所以由式(8.6.14)知

$$\bar{f}(x_1, \cdots, x_n) = 1, \quad x_i \in [0,1], \quad i = 1, \cdots, n. \tag{8.6.15}$$

由 R_0 代数的完备性定理知式(8.6.15)在每个 R_0 代数 M 中都成立,即

$$\bar{f}(y_1, \cdots, y_n) = 1_M, \quad y_i \in M, \quad i = 1, \cdots, n. \tag{8.6.16}$$

特别是 $M = \bar{F}$ 为 $\mathscr{L}^*$-Lindenbaum 代数时式(8.6.16)成立. 设 $\varphi: F(S) \to \bar{F}$ 为典型同态,则

$$\bar{A} = \varphi(A) = \bar{f}(\varphi(p_1), \cdots, \varphi(p_n)) = \bar{f}(\bar{p}_1, \cdots, \bar{p}_n) = 1_{\bar{F}}.$$

所以由 $1_{\bar{F}}$ 为 $F(S)$ 中定理所在的同余类知 A 为定理,即式(8.6.13)成立.

注 8.6.3 有了 $\mathscr{L}^*$ 的完备性定理就可以通过检验一个公式是否为重言式而判断该公式是否为定理. 也可通过判断两个公式是否逻辑等价而判断它们是否可证等价. 比如

(i) $((A \to B) \to B) \to A \vee B$ 不是定理.

事实上,设 $A = p_1, B = p_2$,取赋值 $v \in \bar{\Omega}$ 使 $v(p_1) = 0.6, v(p_2) = 0.5$,则 $v((A \to B) \to B) = (0.6 \to 0.5) \to 0.5 = 0.5 \to 0.5 = 1$,且 $v(A \vee B) = v(A) \vee v(B) = 0.6$,所以 $v(((A \to B) \to B) \to A \vee B) = 0.6 \neq 1$. 可见 $((A \to B) \to B) \to A \vee B$ 不是重言式,也就不是定理.

(ii) $A \vee B \sim ((A \to B) \to B) \wedge ((B \to A) \to A)$.

证明 任取 $v \in \bar{\Omega}$,分别以 a 与 b 记 $v(A)$ 和 $v(B)$,以 C 记 $((A \to B) \to B) \wedge ((B \to A) \to A)$,则 $v(A \vee B) = a \vee b$. 当 $a < b$ 时,$v(C) = ((a \to b) \to b) \wedge ((b \to a) \to a) = (1 \to b) \wedge (b' \vee a \to a) = b \wedge (a \vee b' \to a)$. 如果 $b' \leqslant a$,则 $a \vee b' \to a = a \to a = 1$ 从而 $v(C) = b \wedge 1 = b$. 如果 $b' > a$,则 $a' > b, a \vee b' \to a = (a \vee b')' \vee a = (a' \wedge b) \vee a = b \vee a \geqslant b$,所以仍有 $v(C) = b$. 同理可证当 $b < a$ 时 $v(C) = a$. 又,当 $a = b$ 时 $v(C) = (a \to a) \to a = 1 \to a = a$. 总之 $v(C) = \max\{a, b\} = a \vee b = v(A \vee B)$. 所以 $A \vee B$ 与 C 逻辑等价,从而由 $\mathscr{L}^*$ 的完备性定理知

$$A \vee B \sim ((A \to B) \to B) \wedge ((B \to A) \to A). \tag{8.6.17}$$

8.6.4 广义演绎定理

在系统 $\mathscr{L}^*$ 中,演绎定理不成立,即,设 $\Gamma \subset F(S), A, B \in F(S)$,一般从 $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$ 得不出 $\Gamma \vdash A \to B$ 来. 事实上,如果演绎定理成立,则因易证

$$\{A, A \to B, A \to (B \to C)\} \vdash C,$$

从上式出发依次把 $A, A \to B, A \to (B \to C)$ 移至右方即得

$$\vdash (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)). \tag{8.6.18}$$

但通过分别令 A, B, C 为 p_1, p_2, p_3 和分别给它们赋值 0.5, 0.5, 0 得

$$\begin{aligned} & v((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))) \\ &= (0.5 \to (0.5 \to 0)) \to ((0.5 \to 0.5) \to (0.5 \to 0)) \\ &= (0.5 \to 0.5) \to (1 \to 0.5) \\ &= 1 \to 0.5 = 0.5 \neq 1, \end{aligned}$$

所以式(8.6.18)不成立,矛盾!

下面我们给出一种较弱形式的演绎定理.

定义 8.6.9 设 $A, B \in F(S)$,规定

$$A \otimes B = \neg(A \to \neg B),$$

$$A^2 = A \otimes A, A^3 = A^2 \otimes A, \cdots, A^n = A^{n-1} \otimes A, n \geqslant 2.$$

命题 8.6.11 设 $A, B, C \in F(S)$,则:

(i) $A \otimes B \sim B \otimes A$.

(ii) $(A \otimes B) \otimes C \sim A \otimes (B \otimes C)$.

(iii) $A^n \sim A^2, n = 2,3,\cdots$

证明 注意对任一 $v \in \bar{\Omega}$,由式(8.5.1)

$$v(A \otimes B) = v(A) * v(B).$$

所以由 $\mathscr{L}^*$ 的完备性定理和命题 8.5.2 便知本命题成立.

命题 8.6.12 设 $A,B,C \in F(S)$,则

$$\vdash (A^2 \to (B \to C)) \to ((A^2 \to B) \to (A^2 \to C)). \tag{8.6.19}$$

证明 任取 $v \in \bar{\Omega}$,分别以 a,b 和 c 表示 $v(A),v(B)$ 和 $v(C)$,则由命题 8.5.2 中的关于 R_0 代数的性质(P23) 知

$$v((A^2 \to (B \to C)) \to ((A^2 \to B) \to (A^2 \to C))) = 1.$$

所以式(8.6.19) 成立.

命题 8.6.13(广义演绎定理) 设 $\Gamma \subset F(S), A,B \in F(S)$,则

$$\text{若 } \Gamma \cup \{A\} \vdash B, \text{则 } \Gamma \vdash A^2 \to B. \tag{8.6.20}$$

证明 按推理长度 n 进行归纳证明.

(i) 如果 $n = 1$,则 B 为公理或 $B \in \Gamma \cup \{A\}$,这时 $\Gamma \vdash A^2 \to B$ 显然成立.

(ii) 设 $n \leqslant k$ 时式(8.6.20) 成立,令 $n = k+1$. 不妨设 B 不是公理,B 也不属于 $\Gamma \cup \{A\}$. 则在从 $\Gamma \cup \{A\}$ 到 B 的推理中,B 由某 C 与 $C \to B$ 运用 MP 而得,这里 C 与 $C \to B$ 都是 $\Gamma \cup \{A\}$ 的推理长度 $\leqslant k$ 的结论. 由归纳假设,存在从 Γ 到 $A^2 \to C$ 和从 Γ 到 $A^2 \to (C \to B)$ 的推演. 把它们连起来写有

(1)
⋮
(l) $A^2 \to C$ 　　从 Γ 出发的推演
⋮
(m) $A^2 \to (C \to B)$

$(m+1)$ $(A^2 \to (C \to B)) \to ((A^2 \to C) \to (A^2 \to B))$ 　　命题 8.6.12

$(m+2)$ $(A^2 \to C) \to (A^2 \to B)$ 　　$(m),(m+1)$,MP

$(m+3)$ $A^2 \to B$ 　　$(l),(m+2)$,MP

这就证明了式(8.6.20).

例 8.6.6 设 $A,B \in F(S)$,试证:

(i) $\vdash A^2 \to A$.

(ii) $\vdash (A \to B)^2 \to (A^2 \to B)$.

证明 (i) 由 $\{A\} \vdash A$ 和广义演绎定理即得 $\vdash A^2 \to A$.

(ii) 容易验证 $\{A, A \to B\} \vdash B$,两次使用广义演绎定理即得 $\vdash (A \to B)^2 \to (A^2 \to B)$.

习 题 8.6

1. 举例说明在 **Łuk** 系统中命题 8.6.1 不成立.

2. 试证$(A \to (B \to C)) \sim (A \otimes B \to C)$.

3. 设 $A \oplus B = \neg A \to B$,试证:

(i) $A \oplus B \sim B \oplus A$.

(ii) $A \oplus (B \oplus C) \sim (A \oplus B) \oplus C$.

(iii) 设 B 为矛盾式(如 $B = \neg(p \to p)$),则 $A \oplus B \sim A$.

4. 试证 $A \vdash A^2, A^2 \vdash A$,但 $A \sim A^2$ 不成立.

5. 设 $A \in F(S)$. 以 $\bar{\Omega}(A) = \{v(A) \mid v \in \bar{\Omega}\}$. 规定

$$A\bar{\Omega}B \quad \text{当且仅当} \quad \bar{\Omega}(A) = \bar{\Omega}(B). \tag{8.6.21}$$

(i) 试证 $F(S)$ 上的二元关系 $\bar{\Omega}$ 为等价关系.

(ii) 试问 $F(S)/\bar{\Omega}$ 中共有多少个等价类?

第9章 计量逻辑学

通过前面的学习读者已清楚地看到,数理逻辑的特点在于符号化和形式化,它和计算数学有截然不同的风格:前者注重形式推理而后者注重数值计算;前者强调严格论证而后者允许近似求解.如果说数理逻辑具有刻板的一丝不苟的形象,那么数值计算则具有灵活的张弛有度的特征.一个自然的问题是:能不能设法使数理逻辑不那么刻板?或者更明确地问:能不能将数值计算引入到数理逻辑中以使其具有某种灵活性从而扩大其可能的应用范围?我们将在本章中给出这一问题的肯定回答.我们的根本出发点是:从基本概念的**程度化**入手.

逻辑演算理论包含有语义理论与语构理论两大部分.对于好的逻辑系统来说,这两个部分可通过完备性定理而和谐地统一起来.鉴于语构理论具有更明显的形式化特点,也就更不易于进行程度化,所以我们的程度化首先从语义理论开始.由于完备性定理的存在,语义理论的程度化可以自然地导致语构理论的程度化.又,本章主要致力于将各种命题逻辑系统程度化而建立一种计量逻辑学,这些逻辑系统包括经典的二值命题逻辑系统 **L**,Łukasiewicz 多值命题逻辑系统 $\mathbf{Ł}_n$ 与 **Łuk** 以及命题演算系统 $\mathscr{L}_n^*$ 和 $\mathscr{L}^*$ 等.至于 Gödel n 值系统 $\mathbf{G}_n$ 与乘积 n 值系统 $\mathbf{\Pi}_n$,我们将指出当 n 较大时它们均具有较明显的缺陷,因而本章不予研究.最后,本章中的方法也可用于建立计算的谓词逻辑学,但情形要复杂许多,我们将在另文中研究.

9.1 二值命题逻辑系统 L 中的计量逻辑理论

本节中我们将二值命题逻辑系统 **L** 中的重言式概念程度化,引入公式的真度概念.在此基础上将逻辑等价概念程度化,引入公式之间的相似度概念,并从而在 **L** 的全体公式集 $F(S)$ 上引入伪距离,提出一个理论 Γ 的发散度与相容度理论.最后,我们在系统 **L** 中给出一种近似推论理论.相关的原始文献可参看[①②③].

9.1.1 系统 L 中公式的真度理论

设 $A(p_1,\cdots,p_n)$ 是系统 **L** 中含有 n 个原子命题的公式,则由定义 2.2.6 知 A 确定一个 n 元 Boole 函数 $\overline{A}:\{0,1\}^n\to\{0,1\}$.对于 $p_1,\cdots,p_n$ 的某些赋值,A 的赋值等

① 王国俊,傅丽,宋建社.二值命题逻辑中命题的真度理论.中国科学,A 辑,2001(31),11,998～1008.

② GJ Wang, WX Zhang. Consistency degrees of finite theories in Łukasiewicz propositional fuzzy logic. Fuzzy Sets and Systems,2005(149),275～284.

③ X N Zhou, G J Wang. Consistency degrees of theories in some systems of propositional fuzzy logic. Fuzzy Sets and Systems,2005(152),321～331.

于 1. 上述赋值的个数用函数 $\overline{A}$ 表示就是 $|\overline{A}^{-1}(1)|$. 又，$p_1,\cdots,p_n$ 的各种赋值的总数就是 n 维 0-1 向量 $(v(p_1),\cdots,v(p_n))$ $(v(p_i)=0$ 或 $1, i=1,\cdots,n)$ 的总数，共有 2^n 个. 所以从计算概率的观点我们给出如下：

定义 9.1.1 设 $A(p_1,\cdots,p_n)$ 是系统 **L** 中含有 n 个原子公式的合式公式，则 A 的**真度** $\tau(A)$ 定义如下：

$$\tau(A)=\frac{|\overline{A}^{-1}(1)|}{2^n}. \tag{9.1.1}$$

下面的推论是明显的：

推论 9.1.1 设 $A(p_1,\cdots,p_n)\in F(S)$，则

(i) A 是重言式当且仅当 $\tau(A)=1$.

(ii) A 是矛盾式当且仅当 $\tau(A)=0$.

例 9.1.1 求公式 $p,\neg p,p\wedge q$ 和 $p\rightarrow q$ 的真度.

解 (i) p 对应的 Boole 函数为 $\overline{p}=x:\{0,1\}\rightarrow\{0,1\}$，这里 $\overline{p}(x)=x$，所以 $|\overline{p}^{-1}(1)|=1$，由式(9.1.1)得 $\tau(p)=\frac{1}{2}$.

(ii) $\overline{\neg p}(x)=1-x$，$|\overline{\neg p}^{-1}(1)|=1$，仍有 $\tau(\neg p)=\frac{1}{2}$.

(iii) $\overline{p\wedge q}(x,y)=x\wedge y$. 只有当 $x=y=1$ 时才有 $x\wedge y=1$，所以 $|\overline{p\wedge q}^{-1}(1)|=1$. 由式(9.1.1)得 $\tau(p\wedge q)=\frac{1}{4}$.

(iv) $\overline{p\rightarrow q}=x\rightarrow y=(1-x)\vee y$. 这时 $\overline{p\rightarrow q}^{-1}(1)=\{(0,0),(0,1),(1,1)\}$，$|\overline{p\rightarrow q}^{-1}(1)|=3$. 由式(9.1.1)得 $\tau(p\rightarrow q)=\frac{3}{4}$.

由(9.1.1)式可见，$F(S)$ 中每个公式的真度都是一个以 2 的方幂为分母的非负分数. 反过来，是不是每个这种分数都是 $F(S)$ 中某个公式的真度呢？回答是肯定的，即，设

$$H=\{\tau(A)\,|\,A\in F(S)\},$$

则有如下命题：

命题 9.1.1 $H=\left\{\frac{k}{2^n}\,\middle|\,k=0,1,\cdots,2^n;n=1,2,\cdots\right\}$.

证明 由式(9.1.1)知只需证明对任一分数 $\frac{k}{2^n}(0\leqslant k\leqslant 2^n,n=1,2,\cdots)$，$F(S)$ 中有公式 A 使 $\tau(A)=\frac{k}{2^n}$.

事实上，取 n 元 Boole 函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$，用列表法给出 f 的值. 任取 k 个 n 维 0-1 向量使其对应 1，让其余的向量对应 0，则 $|f^{-1}(1)|=k$. 由命题 2.2.5，f 可由某

合式公式 $A(p_1,\cdots,p_n)$ 导出，这时 $|\overline{A}^{-1}(1)|=k$，所以由式(9.1.1)得 $\tau(A)=\frac{k}{2^n}$.

注 9.1.1　由上面命题 9.1.1 的证明看出，既然函数 f 的构作有随意性(见“任取 k 个 n 维 0-1 向量”等语)，所以具有真度 $\frac{k}{2^n}$ 的逻辑公式可以远远不止一个. 比如，在例 9.1.1 中不同的公式 p 和 $\neg p$ 都具有真度 $\frac{1}{2}$.

因为逻辑等价(可证等价)的公式导出相同的 Boole 函数，所以有

命题 9.1.2　设 $A\approx B(A\sim B)$，则 $\tau(A)=\tau(B)$.

设 $A,B\in F(S)$. 不妨设 A 与 B 含有同样的原子公式 $p_1,\cdots,p_n$，因为由命题 9.1.2 知必要时可以给 A 或 B 并上形如 $\neg(p_i\rightarrow p_i)$ 的矛盾式而保持 A 或 B 的真度不变. 设 $\tau(A)=\frac{m}{2^n}$，$\tau(B)=\frac{k}{2^n}$，则对 $\overline{A}(x_1,\cdots,x_n)$ 和 $\overline{B}(x_1,\cdots,x_n)$ 而言，分别有 m 个和 k 个 0-1 向量使 $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 的值等于 1. 再设共有 l 个 0-1 向量使 $\overline{A}\wedge\overline{B}=1$，则 $\tau(A\wedge B)=\frac{l}{2^n}$. 这时有 $m+k-l$ 个 0-1 向量使 $\overline{A}\vee\overline{B}$ 的值等于 1，所以有 $\tau(A\vee B)=\frac{m+k-l}{2^n}$. 由以上论证得

命题 9.1.3　设 $A,B\in F(S)$，则

$$\tau(A\vee B)=\tau(A)+\tau(B)-\tau(A\wedge B).\tag{9.1.2}$$

推论 9.1.2　设 $A\in F(S)$，则 $\tau(\neg A)=1-\tau(A)$.

证明　在式(9.1.2)中取 $B=\neg A$，则左边是重言式的真度，等于 1. 右边末项是矛盾式的真度. 等于 0，所以推论 9.1.2 成立.

命题 9.1.4　设 $A,B,C\in F(S)$，$\alpha,\beta\in[0,1]$.

(i) 若 $\tau(A)\geqslant\alpha$，$\tau(A\rightarrow B)\geqslant\beta$，则 $\tau(B)\geqslant\alpha+\beta-1$.

(ii) 若 $\tau(A\rightarrow B)\geqslant\alpha$，$\tau(B\rightarrow C)\geqslant\beta$，则 $\tau(A\rightarrow C)\geqslant\alpha+\beta-1$.

(iii) 若 $\vdash A\rightarrow B$，则 $\tau(A)\leqslant\tau(B)$.

证明　(i) 由命题 9.1.3 及其推论 9.1.2 和题设条件得

$$\begin{aligned}\tau(A\rightarrow B)&=\tau(\neg A\vee B)=\tau(\neg A)+\tau(B)-\tau(\neg A\wedge B)\\&=1-\tau(A)+\tau(B)-\tau(\neg A\wedge B)\geqslant\beta.\end{aligned}$$

又

$$\tau(A)\geqslant\alpha.$$

由以上二式得

$$1+\tau(B)-\tau(\neg A\wedge B)\geqslant\alpha+\beta.$$

所以

$$\tau(B)\geqslant\alpha+\beta-1+\tau(\neg A\wedge B)\geqslant\alpha+\beta-1.$$

(ii) 令 $E=(B\to C)\to((A\to B)\to(A\to C))$，则 $\tau(E)=1$. 又，$\tau(B\to C)\geqslant\beta$，所以由(i) 知

$$\tau((A\to B)\to(A\to C))\geqslant 1+\beta-1=\beta.$$

又，$\tau(A\to B)\geqslant\alpha$. 所以由(i) 得 $\tau(A\to C)\geqslant\alpha+\beta-1$.

(iii) 这时由(i) 知 $\beta=1$，所以 $\tau(B)\geqslant\alpha=\tau(A)$.

9.1.2 系统 L 中公式之间的相似度

上面所讲的公式的真度概念是重言式概念的推广. 由推论 9.1.2 看出，所谓重言式与矛盾式只不过分别是真度等于 1 和真度等于 0 的两个极端情形而已. 下面我们将系统 **L** 中公式之间的逻辑等价概念进行程度化.

定义 9.1.2 设 $A,B\in F(S)$，令

$$\xi(A,B)=\tau((A\to B)\wedge(B\to A)),\tag{9.1.3}$$

称 $\xi(A,B)$ 为公式 A 与 B 之间的**相似度**①.

显然 $\xi(A,B)=\xi(B,A)$.

命题 9.1.5 设 $A,B\in F(S)$，则

$$\xi(A,B)=\tau(A\wedge B)+\tau(\neg A\wedge\neg B)=1+\tau(A\wedge B)-\tau(A\vee B).\tag{9.1.4}$$

证明 由命题 9.1.3 得

$$\begin{aligned}\xi(A,B)&=\tau((A\to B)\wedge B\to A))\\&=\tau((\neg A\vee B)\wedge(\neg B\vee A))\\&=\tau((\neg A\wedge\neg B)\vee(A\wedge B))\\&=\tau(A\wedge B)+\tau(\neg A\wedge\neg B)-\tau((A\wedge B)\wedge(\neg A\wedge\neg B))\\&=\tau(A\wedge B)+\tau(\neg A\wedge\neg B).\end{aligned}$$

又，由推论 9.1.2 得

$$\tau(\neg A\wedge\neg B)=\tau(\neg(A\vee B))=1-\tau(A\vee B).$$

所以式(9.1.4) 成立.

例 9.1.2 计算 $\xi(p,\neg p\to q)$

解 因为

$$(p\to(\neg p\to q))\wedge((\neg p\to q)\to p)\sim(p\vee q\to p)\sim q\to p,$$

所以由式(9.1.3) 和命题 9.1.2 得

$$\xi(p,\neg p\to q)=\tau(q\to p)=\frac{3}{4}.$$

① 宋庆燕，扬兴忠. 命题逻辑公式集上的正则相似关系. 陕西师范大学学报(自然科学版)，2002，30(4)：23 ～ 27.

命题 9.1.6 设 $A,B,C \in F(S)$，则

(i) $\xi(A,B)=1$ 当且仅当 $A \sim B$.

(ii) $\xi(A,B)=0$ 当且仅当 $A \sim \neg B$.

(iii) $\xi(A,B)+\xi(A,\neg B)=1$.

(iv) $\xi(A,B)+\xi(B,C) \leqslant 1+\xi(A,C)$. (9.1.5)

证明 (i) $\xi(A,B)=1$ 即 $\tau((A \to B) \wedge (B \to A))=1$ 当且仅当 $(\bar{A} \to \bar{B}) \wedge (\bar{B} \to \bar{A}) \equiv 1$，即 $\bar{A} \to \bar{B} \equiv 1$ 且 $\bar{B} \to \bar{A} \equiv 1$. 因为在 $\{0,1\}$ 中 $a \to b=1$ 当且仅当 $a \leqslant b$，上述事实等价于 $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 在各变元(0-1 向量)处的值均相等，也就是 $A \approx B$ 或 $A \sim B$.

(ii) 是(i) 和(iii) 的直接推论，所以下面证明(iii).

(iii) 由式(9.1.4) 得

$$\xi(A,B)=\tau(\neg A \wedge \neg B)+\tau(A \wedge B). \tag{9.1.6}$$

$$\xi(A,\neg B)=\tau(\neg A \wedge B)+\tau(A \wedge \neg B). \tag{9.1.7}$$

又，由命题 9.1.3 得

$$\begin{aligned}&\tau(\neg A \wedge \neg B)+\tau(\neg A \wedge B)\\&=\tau((\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B))-\tau((\neg A \wedge \neg B) \wedge (\neg A \wedge B))\\&=\tau(\neg A).\end{aligned} \tag{9.1.8}$$

$$\begin{aligned}&\tau(A \wedge B)+\tau(A \wedge \neg B)\\&=\tau((A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B))-\tau((A \wedge B) \wedge (A \wedge \neg B))\\&=\tau(A).\end{aligned} \tag{9.1.9}$$

所以由推论 9.1.2 和式(9.1.6) ～ 式(9.1.9) 即得(iii).

(iv) 由式(9.1.4) 和推论 9.1.2 有

$$\begin{aligned}&\xi(A,B)+\xi(B,C)-\xi(A,C)\\&=1+\tau(A \wedge B)-\tau(A \vee B)+1+\tau(B \wedge C)-\tau(B \vee C)-(1+\tau(A \wedge C)\\&\quad-\tau(A \vee C))\\&=1+\tau(A \wedge B)+\tau(B \wedge C)-\tau(A \wedge C)-\tau(A \vee B)-\tau(B \vee C)+\tau(A \vee C)\\&=1+\tau(A \wedge B)+\tau(B \wedge C)-\tau(A \wedge C)-(\tau(A)+\tau(B)-\tau(A \wedge B))\\&\quad-(\tau(B)+\tau(C)-\tau(B \wedge C))+(\tau(A)+\tau(C)-\tau(A \wedge C))\\&=1-2\tau(B)+2\tau(A \wedge B)+2\tau(B \wedge C)-2\tau(A \wedge C).\end{aligned}$$

所以为证(iv) 只需证明

$$\tau(A \wedge B)+\tau(B \wedge C) \leqslant \tau(B)+\tau(A \wedge C). \tag{9.1.10}$$

不妨设 A,B,C 含有相同的原子公式 $p_1,\cdots,p_n$. 设 $|\bar{B}^{-1}(1)|=m$，$|\overline{B \wedge A}^{-1}(1)|=m_1$，$|\overline{B \wedge C}^{-1}(1)|=m_2$，$|\overline{B \wedge A \wedge C}^{-1}(1)|=k$，$|\overline{A \wedge C}^{-1}(1)|=l$. 由图 9.1.1 看出，

$$(\bar{B}^{-1}(1) \cap \bar{A}^{-1}(1)) \cup (\bar{B}^{-1}(1) \cap \bar{C}^{-1}(1)) \subset \bar{B}^{-1}(1).$$

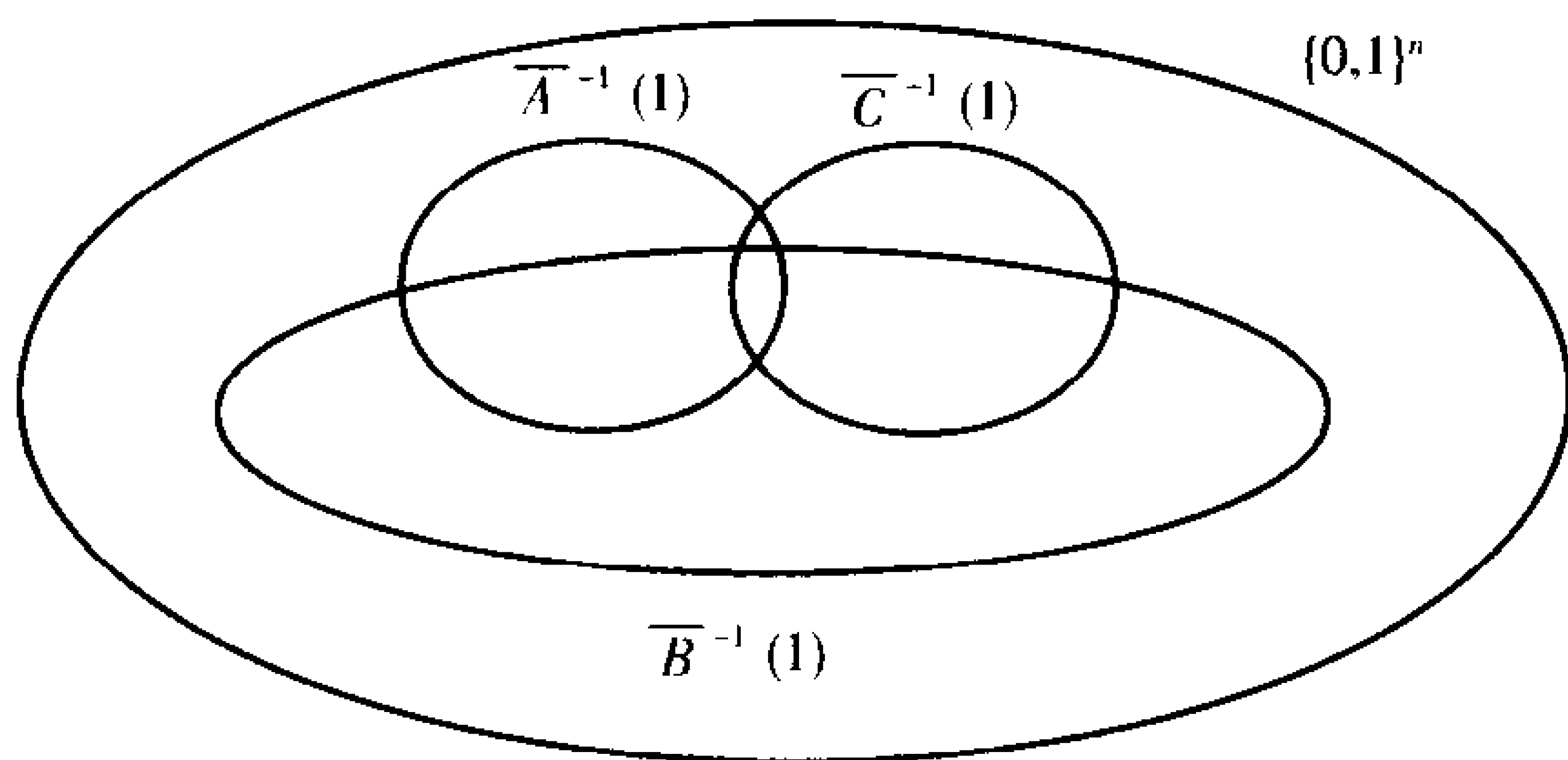


图 9.1.1

所以

$$|\overline{B \wedge A}^{-1}(1)| + |\overline{B \wedge C}^{-1}(1)| - |\overline{B \wedge A \wedge C}^{-1}(1)| \leqslant |\overline{B}^{-1}(1)|.$$

即

$$m_1 + m_2 - k \leqslant m.$$

又，$k \leqslant l$，所以

$$m_1 + m_2 \leqslant m + l.$$

从而由 $\tau(A \wedge B) = \frac{m_1}{2^n}$，$\tau(B \wedge C) = \frac{m_2}{2^n}$，$\tau(B) = \frac{m}{2^n}$，和 $\tau(A \wedge C) = \frac{l}{2^n}$，即得式(9.1.10).

9.1.3　系统 L 中公式之间的伪距离

如果可以在系统 **L** 的全体公式集 $F(S)$ 上引入伪距离，并且使这种伪距离与 $F(S)$ 上的连接词运算相和谐，那么就可以方便地在系统 **L** 中讨论近似推理问题. 本节中我们将看到，这种伪距离可以由相似度导出.

定义 9.1.3　在 $F(S)$ 上定义二元非负实函数 $\rho: F(S) \times F(S) \to [0,1]$ 如下：

$$\rho(A,B) = 1 - \xi(A,B), \quad A,B \in F(S). \tag{9.1.11}$$

则 ρ 是 $F(S)$ 上的伪距离. 称为 $F(S)$ 上的**自然伪距离**，简称**伪距离**.

注 9.1.2　(i) 由命题 9.1.6(iv) 易证由式(9.1.11)定义的 ρ 确为 $F(S)$ 上的伪距离. 但 ρ 不是 $F(S)$ 上的距离. 事实上，易证对任二不同的定理 A 与 B 而言有 $\rho(A, B) = 0$，但 $A \neq B$.

(ii) 如果没有附加的要求，那么在任何非空集上引入伪距离(甚至距离)都是很容易的事，比如，设 X 是非空集，规定 $d(x,y) = 1$ 当且仅当 $x \neq y$，且 $d(x,y) = 0$ 当且仅当 $x = y$，(X,d) 就构成距离空间. 但这是基本上无用的距离空间. 本节中我们将要证明，$F(S)$ 上的一元运算 $\neg$ 和二元运算 $\to$，$\wedge$，$\vee$ 关于 ρ 而言都是连续的，所以我们称 ρ 为 $F(S)$ 上的自然伪距离.

命题 9.1.7　伪距离空间 $(F(S),\rho)$ 具有如下性质：

(i) $0 \leqslant \rho(A,B) \leqslant 1$，$A,B \in F(S)$.

(ii) 设 $A,B \in F(S)$，则有自然数 n 和 k 使 $\rho(A,B) = \frac{k}{2^n}(0 \leqslant k \leqslant 2^n)$.

(iii) 任给形如 $\frac{k}{2^n}(0 \leqslant k \leqslant 2^n)$ 的分数，有 $A,B \in F(S)$ 使 $\rho(A,B) = \frac{k}{2^n}$.

证明　由式(9.1.11)看出(i)和(ii)都是显然成立的. 下面证明(iii). 设给定分数 $\frac{k}{2^n}(0 \leqslant k \leqslant 2^n)$，由命题 9.1.1 知有公式 A 使 $\tau(A) = \frac{k}{2^n}$. 取 B 为任一矛盾式，比如取 $B = \neg(p_1 \to p_1)$，则由式(9.1.4)和推论 9.1.2 得

$$\begin{aligned}\xi(A,B) &= \tau(A \wedge \neg(p_1 \to p_1)) + \tau(\neg A \wedge (p_1 \to p_1)) \\ &= 0 + 1 - \tau(A) = 1 - \frac{k}{2^n}.\end{aligned}$$

所以由式(9.1.11)得 $\rho(A,B) = \frac{k}{2^n}$.

$F(S)$ 中虽有许多不同的矛盾式，但彼此等价，所以以下用 $\bar{0}$ 表示任一矛盾式.

命题 9.1.8　在伪距离空间 $(F(S),\rho)$ 中，

(i) $\rho(A,B) = 0$ 当且仅当 $A \sim B, A,B \in F(S)$.

(ii) $\rho(A,B) = 1$ 当且仅当 $A \sim \neg B,\ A,B \in F(S)$.

(iii) $\rho(A,\bar{0}) = \tau(A), A \in F(S)$.

证明　(i) 由式(9.1.11)看出 $\rho(A,B) = 0$ 当且仅当 $\xi(A,B) = 1$，所以由命题 9.1.6 的(i)即得本命题的(i).

(ii) 由命题 9.1.6 的(ii)得出.

(iii) $\rho(A,\bar{0}) = 1 - \xi(A,\bar{0}) = 1 - \tau((A \to \bar{0}) \wedge (\bar{0} \to A)) = 1 - \tau(\neg A) = \tau(A)$.

例 9.1.3　设 $A = p_1 \wedge \cdots \wedge p_n, B = p_1 \vee \cdots \vee p_n, p_1, \cdots, p_n$ 是不同的原子公式.

(i) 计算 $\rho(A,\bar{0})$. (ii) 计算 $\rho(B,\bar{0})$. (iii) 计算 $\rho(A,B)$.

解　(i) $\rho(A,\bar{0}) = \tau(A)$. 因为 $\bar{A} = x_1 \wedge \cdots \wedge x_n$ 只有当 $x_1 = \cdots = x_n = 1$ 时才等于 1，所以 $\tau(A) = \frac{1}{2^n}, \rho(A,\bar{0}) = \frac{1}{2^n}$.

(ii) $\rho(B,\bar{0}) = \tau(B)$. 因为 $\bar{B} = x_1 \vee \cdots \vee x_n$ 除 $x_1 = \cdots = x_n = 0$ 外都等于 1，所以 $\rho(B,\bar{0}) = \tau(B) = \frac{2^n - 1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$.

(iii) 先计算 $\xi(A,B)$，由 $A \to B$ 为重言式知

$$\xi(A,B) = \tau((A \to B) \wedge (B \to A)) = \tau(B \to A).$$

因为

$\overline{B \to A} = x_1 \vee \cdots \vee x_n \to x_1 \wedge \cdots \wedge x_n = 1$ 当且仅当 $x_1 = \cdots = x_n = 0$ 或

$x_1 = \cdots = x_n = 1$,

所以 $\tau(B \to A) = \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$. 那么由式(9.1.11)得 $\rho(A,B) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$. 特别当 $n = 2$ 时得 $\rho(p_1 \wedge p_2, p_1 \vee p_2) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

注 9.1.3 若在上例中将 B 改为 $q_1 \vee \cdots \vee q_n$,这里 $p_1,\cdots,p_n,q_1,\cdots,q_n$ 是互不相同的原子公式,则(i)与(ii)的结果不变,但 $\rho(A,B)$ 的计算要稍稍复杂一些,请读者完成 $\rho(A,B)$ 的计算.

命题 9.1.9 在伪距离空间 $(F(S),\rho)$ 中,一元运算 $\neg$ 和二元运算 $\to$, $\vee$ 和 $\wedge$ 都是连续的.

证明 由命题 9.1.6(iii)和式(9.1.11)有

$$\rho(A,B) + \rho(A,\neg B) = 1. \tag{9.1.12}$$

由此得

$$\rho(\neg A,\neg B) = 1 - \rho(A,\neg B) = 1 - (1 - \rho(A,B)) = \rho(A,B). \tag{9.1.13}$$

所以如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(A_n,A) = 0$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}(\neg A_n, \neg A) = 0$. 这就是证明了 $\neg: F(S) \to F(S)$ 关于 ρ 是连续的.

其次证明蕴涵算子 $\to: F(S)\times F(S) \to F(S)$ 关于 ρ 的连续性. 由于 $(A \to B) \to B \sim A \vee B$(请读者自行验证),所以由

$$\begin{aligned}\xi(A_1 \to B, A_2 \to B) &= \tau(((A_1 \to B) \to (A_2 \to B)) \wedge ((A_2 \to B) \to (A_1 \to B))) \\ &= \tau((A_2 \to ((A_1 \to B) \to B)) \wedge (A_1 \to ((A_2 \to B) \to B))) \\ &= \tau((A_2 \to A_1 \vee B) \wedge (A_1 \to A_2 \vee B))\end{aligned}$$

和

$$\vdash (A_2 \to A_1) \to (A_2 \to A_1 \vee B), \quad \vdash (A_1 \to A_2) \to (A_1 \to A_2 \vee B)$$

以及命题 9.1.4(iii)得

$\xi(A_1 \to B, A_2 \to B) \geqslant \tau((A_2 \to A_1) \wedge (A_1 \to A_2)) = \xi(A_1, A_2)$,从而由式(9.1.11)得

$$\rho(A_1 \to B, A_2 \to B) \leqslant \rho(A_1, A_2). \tag{9.1.14}$$

设 $\varepsilon > 0$, $\rho(A_n, A) < \varepsilon$,则由式(9.1.14)得 $\rho(A_n \to B, A \to B) < \varepsilon$,且此不等式对所有的 B 一致地成立. 由此以及不等式

$$\rho(A_n \to B_n, A \to B) \leqslant \rho(A_n \to B_n, A_n \to B) + \rho(A_n \to B, A \to B),$$

易证当 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(A_n,A) = \lim\limits_{n\to\infty}\rho(B_n,B) = 0$ 时有 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(A_n \to B_n, A \to B) = 0$. 这就证明了蕴涵算子 $\to$ 的连续性.

最后,由 $A \vee B = \neg A \to B$ 以及 $A \wedge B = \neg(A \to \neg B)$ 和以上已证结果看出析取运算 $\vee$ 与合取运算 $\wedge$ 也都是 $(F(S),\rho)$ 中的连续运算.

9.1.4 系统 L 中理论 Γ 的发散度

设 $\Gamma \subset F(S)$，则称 Γ 为系统 **L** 中的**理论**. 如果从 Γ 可以推出矛盾式 $\bar{0}$，则 $F(S)$ 中每个公式都是 Γ- 结论，这时 $D(\Gamma) = F(S)$. $D(\Gamma)$ 在 $(F(S),\rho)$ 中的直径 $\sup\{\rho(A,B) \mid A,B \in D(\Gamma)\} = \rho(T,\bar{0}) = 1$，这里 T 为任一定理. 这种理论是不相容的，没有什么用处. 另一个极端情形是 Γ 中的公式都是定理，这时 $D(\Gamma)$ 中的公式也都是定理，$D(\Gamma)$ 的直径等于 0，一般来说 $D(\Gamma)$ 的直径在 0 与 1 之间. $D(\Gamma)$ 的直径越大，$D(\Gamma)$ 中就有离定理越远的公式；$D(\Gamma)$ 的直径越小，$D(\Gamma)$ 中的公式就都离定理越近. 粗略地说，$D(\Gamma)$ 发散得越大，理论 Γ 就越不好，$D(\Gamma)$ 收缩得越小，理论 Γ 就越好. 由此我们给出以下的

定义 9.1.4 设 Γ 是 $F(S)$ 中的理论，令

$$\operatorname{div}(\Gamma) = \sup\{\rho(A,B) \mid A,B \in D(\Gamma)\}, \tag{9.1.15}$$

称 $\operatorname{div}(\Gamma)$ 为理论 Γ 的**发散度**. 当 $\operatorname{div}(\Gamma) = 1$ 时称 Γ 为**全发散**的理论.

例 9.1.4 计算以下各理论的发散度：

(i) $\Gamma = \{p, \neg p\}$.

(ii) $\Gamma = \{p\}$.

(iii) $\Gamma = S = \{p_1, p_2, \cdots\}$.

解 (i) 因为 $\vdash p \to (\neg p \to A)$ 对每个 $A \in F(S)$ 都成立，所以 $D(\Gamma) = F(S)$，$\operatorname{div}(\Gamma) = 1$，$\Gamma$ 是全发散的.

(ii) 任取 $A,B \in D(\{p\})$，则 $\vdash p \to A$，$\vdash p \to B$，从而 $\vdash p \to A \wedge B$. 由命题 9.1.4(iii) 知 $\tau(p) \leqslant \tau(A \wedge B)$. 由命题 9.1.5 有

$$\xi(A,B) = 1 + \tau(A \wedge B) - \tau(A \vee B).$$

所以由式(9.1.11) 得

$$\rho(A,B) = \tau(A \vee B) - \tau(A \wedge B) \tag{9.1.16}$$

取 A 为定理，$B = p$，则 $\tau(A \vee B)$ 取最大值 1 且 $\tau(A \wedge B)$ 取最小值 $\tau(p) = \frac{1}{2}$，所以由式(9.1.15) 得 $\operatorname{div}(\{p\}) = \frac{1}{2}$.

(iii) 取 A 为定理，B_n 为 $p_1 \wedge \cdots \wedge p_n$. 由例 9.1.3(i) 知 $\tau(B_n) = \frac{1}{2^n}$. 所以由式(9.1.16) 得 $\rho(A,B_n) = 1 - \frac{1}{2^n}$. 因为对每个 n，$S \vdash B_n$，所以由式(9.1.15) 得 $\operatorname{div}(S) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1$. 即，全体原子公式之集 S 是全发散的.

注 9.1.4 (i) 式(9.1.16) 在计算理论 Γ 的发散度时很有用，因为 $D(\Gamma)$ 中总包含有定理，取 A 为定理，则 $\tau(A \vee B) = 1$. 又，$\tau(A \wedge B) = \tau(B)$，所以在计算 $\operatorname{div}(\Gamma)$ 时可以更直接地使用如下公式：

$$\operatorname{div}(\Gamma)=\lim_{n\to\infty}(1-\tau(B_n)) \tag{9.1.17}$$

这里 $B_1, B_2, \cdots$ 是 $D(\Gamma)$ 中真度越来越小的公式序列，且 $D(\Gamma)$ 中不存在真度比 $\lim\limits_{n\to\infty}\tau(B_n)$ 更小的公式. 比如，在例 9.1.4(iii) 中的 $B_n = p_1 \wedge \cdots \wedge p_n$ 就是如此. 有时 $D(\Gamma)$ 中存在一个真度最小的公式 B，这时有

$$\operatorname{div}(\Gamma)=1-\tau(B). \tag{9.1.18}$$

比如，在例 9.1.4(ii) 中的 $B = p$ 就是这样.

(ii) 以上已看到全体原公式之集 S 是全发散的. 事实上从其证明过程可以看出，S 的任一无限集都是全发散的. 但 S 却是相容的，即，$\bar{0} \notin D(S)$. 事实上，若 $\bar{0} \in D(S)$，则 $\bar{0}$ 是 S 中有限多个公式的结论. 所以取 n 充分大就有 $\{p_1, \cdots, p_n\} \vdash \bar{0}$. 由演绎定理得

$$\vdash p_1 \to (p_2 \to (\to \cdots \to (p_n \to \bar{0})\cdots)),$$

即

$$\vdash p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n \to \bar{0}.$$

由命题 9.1.4(iii) 得 $\dfrac{1}{2^n} = \tau(p_1 \wedge \cdots \wedge p_n) \leqslant \tau(\bar{0}) = 0$. 矛盾！所以 S 是相容的.

命题 9.1.10 设 $\Gamma = \{A_1, \cdots, A_n\}$，则

$$\operatorname{div}(\Gamma)=1-\tau(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n). \tag{9.1.19}$$

证明 设 $B \in D(\Gamma)$，则

$$\vdash A_1 \to (A_2 \to (\to \cdots \to (A_n \to B)\cdots)),$$

即

$$\vdash A_1 \wedge A_2 \cdots \wedge A_n \to B.$$

所以由命题 9.1.4(iii) 知 $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n$ 是 $D(\Gamma)$ 中真度最小的公式，从而由式(9.1.18) 即得式(9.1.19).

9.1.5 系统 L 中理论 Γ 的相容度

在二值命题逻辑的经典论述中，一个理论 Γ 要么是相容的，要么是不相容的，分别取决于 $\bar{0} \notin D(\Gamma)$ 或 $\bar{0} \in D(\Gamma)$. 不相容理论都一样，因为 $F(S)$ 中每个公式都是其结论. 但相容理论却可以很不一样，比如，$\Gamma_1 = \{p \to p\}$，$\Gamma_2 = \{p\}$ 和 $\Gamma_3 = S$ 都是相容的理论，但 $D(\Gamma_1)$ 中只含有定理，$D(\Gamma_2)$ 中则含有真度等于 $\dfrac{1}{2}$ 的公式，而 $D(\Gamma_3)$ 中则含有真度任意小的公式. 换句话说，Γ_1 是远离矛盾式的理论，$D(\Gamma_1)$ 中的公式与 $\bar{0}$ 的距离都等于最大的距离 1，Γ_2 则要差一些，因为 $D(\Gamma_2)$ 中含有与 $\bar{0}$ 距离等于 $\dfrac{1}{2}$ 的公式，而 Γ_3 最差，因为 $D(\Gamma_3)$ 中含有与矛盾式任意接近的公式. 由此可见，对于同为相容的理论而言，应当设法区分其相容的程度. 一个朴素的想法是，越远离矛盾式的理论其相容度越高.

在上一节中曾引入过理论的发散度概念，对于上面讨论的理论 Γ_1，Γ_2 和 Γ_3 而言，其发散度分别为 0，$\frac{1}{2}$ 和 1. 这容易使人想到用 $1-\operatorname{div}(\Gamma)$ 去反映 Γ 的相容度. 但这样一来相容理论 $\Gamma_3 = S$ 的相容度将和不相容理论 $\Gamma_4 = \{p, \neg p\}$ 的相容度一样等于 0 了. 正如 Novák 等在文献[27]中所说，如何给出一个理论 Γ 的相容度定义是不容易的. 但在下面我们将看到，利用理论 Γ 的发散度概念并适当加以改造就可成功地引入 Γ 的相容度概念，读者可参阅这方面的原始文献①②③. 另外，对于有限理论 Γ，可以更简单地引入其相容度概念.

首先引入一个记号⌈⌉如下：

$$\lceil x \rceil = \begin{cases} 1, & 0 < x \leqslant 1, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad x \in [0,1]. \tag{9.1.20}$$

定义 9.1.5　设 Γ 是 $F(S)$ 中的理论，令

$$i(\Gamma) = 1 - \min\{\lceil 1 - \rho(A,B) \rceil \mid A, B \in D(\Gamma)\}. \tag{9.1.21}$$

称 $i(\Gamma)$ 为 Γ 的**极指标**.

显然，$\lceil 1 - \rho(A,B) \rceil$ 只有当 $A \sim \neg B$ 时才等于 0，否则其值恒为 1. 注意 $i(\Gamma)$ 只能取 0 与 1 两个值，由式(9.1.21)不难证明下述命题.

命题 9.1.11　设 Γ 是 $F(S)$ 中的理论，则 Γ 不相容当且仅当 $i(\Gamma) = 1$，Γ 相容当且仅当 $i(\Gamma) = 0$.

定义 9.1.6　设 Γ 是 $F(S)$ 中的理论，令

$$\eta(\Gamma) = 1 - \frac{1}{2}\operatorname{div}(\Gamma)(1 + i(\Gamma)), \tag{9.1.22}$$

称 $\eta(\Gamma)$ 为理论 Γ 的 **η- 相容度**，简称**相容度**.

命题 9.1.12　设 Γ 是 $F(S)$ 中的理论，则

(i) Γ 是**完全相容**的，即，Γ 全由定理组成，当且仅当 $\eta(\Gamma) = 1$.

(ii) Γ 是相容的当且仅当 $\frac{1}{2} \leqslant \eta(\Gamma) \leqslant 1$. Γ 相容且全发散当且仅当 $\eta(\Gamma) = \frac{1}{2}$.

(iii) Γ 是不相容的当且仅当 $\eta(\Gamma) = 0$.

证明　(i) 设 Γ 完全相容，则对任二 $A, B \in D(\Gamma)$ 均有 $\rho(A,B) = 0$，从而 $\operatorname{div}(\Gamma) = 0$，所以由式(9.1.22)知 $\eta(\Gamma) = 1$. 反过来，设 $\eta(\Gamma) = 1$，则由式(9.1.22)得 $\frac{1}{2}\operatorname{div}(\Gamma)(1 + i(\Gamma)) = 0$，且 $\frac{1}{2}(1 + i(\Gamma)) \neq 0$，所以 $\operatorname{div}(\Gamma) = 0$，从而 $D(\Gamma)$ 中的

---

① GJ Wang, WX Zhang. Consistency degrees of finite theories in Łukasiewicz propositional fuzzy logic. Fuzzy Sets and System, 2005(149), 275 ~ 284.

② XN Zhou, GJ Wang. Consistency degrees of theories in some systems of propositional fuzzy logic. Fuzzy Sets and systems, 2005(152), 321 ~ 331.

③ HJ Zhou, GJ Wang. A new theory consisteny index based on deduction theorems in several logic systems. Fyzzy Sets and systems, 2006(157), 427 ~ 443.

公式全为定理，那么 Γ 是完全相容的.

(ii) 由命题 9.1.11 知当 Γ 相容时 $i(\Gamma)=0$，从而由式(9.1.22) 知 $\frac{1}{2}\leqslant\eta(\Gamma)\leqslant 1$. 反过来，当 Γ 不相容时 $i(\Gamma)=1$ 且 $\operatorname{div}(\Gamma)=1$，从而 $\eta(\Gamma)=0$，$\frac{1}{2}\leqslant\eta(\Gamma)\leqslant 1$ 不成立. (ii) 的后半部分的证明是显然的.

(iii) 在证明(ii) 时已证若 Γ 不相容则 $\eta(\Gamma)=0$. 反过来，设 $\eta(\Gamma)=0$，则由式(9.1.22) 知 $\operatorname{div}(\Gamma)(1+i(\Gamma))=2$，又 $\operatorname{div}(\Gamma)\leqslant 1$，所以 $i(\Gamma)=1$. 那么由命题 9.1.11 知 Γ 不相容.

例 9.1.5 求 Γ 的相容度，设：

(i) $\Gamma=\{p_1,\cdots,p_n\}$.

(ii) $\Gamma=S$.

解 (i) 由命题 9.1.10 知 $\Gamma=\{p_1,\cdots,p_n\}$ 的发散度 $\operatorname{div}(\Gamma)=1-\tau(p_1\wedge\cdots\wedge p_n)=1-\frac{1}{2^n}$. 又，由 Γ 相容知 $i(\Gamma)=0$，所以由式(9.1.22) 得 $\eta(\Gamma)=1-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{n+1}}$. 特别令 $n=1$ 知 $\Gamma=\{p\}$ 的相容度为 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

(ii) 由例 9.1.4 知 S 的发散度等于 1，又，由注 9.1.4(ii) 知 S 相容从而 $i(S)=0$. 所以由式(9.1.22) 知 $\eta(S)=\frac{1}{2}$.

设 $\Gamma=\{A_1,\cdots,A_n\}$ 为有限理论，则还可用下面更简单的方法去定义 Γ 的相容度.

定义 9.1.7 设 $\Gamma=\{A_1,\cdots,A_n\}$. 令

$$\delta(\Gamma)=1-\tau(A_1\wedge\cdots\wedge A_n\to\bar{0}),\tag{9.1.23}$$

称 $\delta(\Gamma)$ 为理论 Γ 的 **δ- 相容度**.

注 9.1.5 因为 $\Gamma\vdash\bar{0}$ 等价于 $\vdash A_1\to(A_2\to(\to\cdots\to(A_n\to\bar{0})\cdots))$，即，$\vdash A_1\wedge\cdots\wedge A_n\to\bar{0}$. 所以自然想到把 $A_1\wedge\cdots\wedge A_n\to\bar{0}$ 的真度称为 Γ 的不相容度，那么称 $\delta(\Gamma)$ 为 Γ 的相容度就是理所当然的了. 只是为了与上面已定义的 η- 相容度相区别，这里加上了前缀"δ-".

命题 9.1.13 设 Γ 是 $F(S)$ 中的有限理论，则

$$\delta(\Gamma)=1-\operatorname{div}(\Gamma).\tag{9.1.24}$$

证明 因为 $A_1\wedge\cdots\wedge A_n\to\bar{0}\sim\neg(A_1\wedge\cdots\wedge A_n)$，所以由推论 9.1.2 和式(9.1.19) 得

$$\delta(\Gamma)=1-\tau(\neg(A_1\wedge\cdots\wedge A_n))=\tau(A_1\wedge\cdots\wedge A_n)=1-\operatorname{div}(\Gamma).$$

由命题 9.1.13 容易得出两种相容度之间的关系如下：

命题 9.1.14 设 Γ 是 $F(S)$ 中的有限理论，则

$$\eta(\Gamma) = 1 - \frac{1}{2}(1 - \delta(\Gamma))(1 + i(\Gamma)). \tag{9.1.25}$$

特别是当 Γ 为相容理论时有

$$\eta(\Gamma) = \frac{1}{2}(1 + \delta(\Gamma)), \text{即 } \delta(\Gamma) = 2\eta(\Gamma) - 1, \tag{9.1.26}$$

而当 Γ 为完全相容理论时有 $\eta(\Gamma) = \delta(\Gamma) = 1$，当 Γ 不相容时有 $\eta(\Gamma) = \delta(\Gamma) = 0$.

9.1.6 系统 L 中的近似推理理论

$F(S)$ 中既然有了伪距离 ρ，公式之间就有了远近之分，这也就为在系统 **L** 中建立近似推理理论提供了方便. 但逻辑推理又是形式化的东西，如何将数值计算融入其中并不容易. 我们先从最省事的一种方法谈起，这种方法实际上回避了形式推理与数值计算的融合.

定义 9.1.8 设 $\Gamma \subset F(S)$，$B \in F(S)$，$\varepsilon > 0$. 若

$$\rho(B, D(\Gamma)) < \varepsilon, \tag{9.1.27}$$

则称 B 为 Γ 的 **I-型误差小于 ε 的结论**，简记为 $B \in D_\varepsilon^1(\Gamma)$.

显然，若 $B \in D(\Gamma)$，则对任意的 $\varepsilon > 0$，$B \in D_\varepsilon^1(\Gamma)$. 但反之不真.

推论 9.1.3 $B \in D_\varepsilon^1(\Gamma)$ 的充要条件是存在 Γ-结论 A 使 $\rho(A, B) < \varepsilon$.

证明 由

$$\rho(B, D(\Gamma)) = \inf\{\rho(B, A) \mid A \in D(\Gamma)\}$$

即得.

例 9.1.6 设 $\Gamma = \{p \vee q, p \vee r\}$，$B = p$. 因为 $p \vee q \to (p \vee r \to p)$ 不是定理，所以 $p \notin D(\Gamma)$. 这时 $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \sim p \vee (q \wedge r) \in D(\Gamma)$ 且

$$\begin{aligned}
\rho(p, p \vee (q \wedge r)) &= 1 - \xi(p, p \vee (q \wedge r)) \\
&= 1 - \tau((p \to p \vee (q \wedge r)) \wedge (p \vee (q \wedge r) \to p)) \\
&= 1 - \tau(p \vee (q \wedge r) \to p) = 1 - \tau(q \wedge r \to p) \\
&= 1 - \tau(\neg q \vee \neg r \vee p) = \frac{1}{8} \\
&= 0.125.
\end{aligned}$$

所以由推论 9.1.3 知 p 是 Γ 的 I-型误差小于 0.13 的结论.

注 9.1.6 在上例中若取 $p \vee q \in D(\Gamma)$，则 $\rho(p, p \vee q) = \frac{1}{4} = 0.25$，所以 p 也是 Γ 的 I-型误差小于 0.30 的结论. 这个论断自然没有上面例子中的好，可见在使用推论 9.1.3 时应当在 $D(\Gamma)$ 中找寻与 B 尽可能接近的 A. 可以证明 $p \vee (q \wedge r)$ 就是 $D(\Gamma)$ 中与 B 最接近的公式了. 事实上，设 $A \in D(\Gamma)$，则由 $\{p \vee q, p \vee r\} \vdash A$ 和演绎定理得 $\vdash (p \vee q) \to (p \vee r \to A)$，即 $\vdash p \vee (q \wedge r) \to A$. 这时 $\vdash p \to A$，由此可知 $\xi(p, A) = \tau((p \to A) \wedge (A \to p)) = \tau(A \to p)$，从而 $\rho(p, A) = 1 - \tau(A \to p)$. 又

$$\vdash (p \vee (q \wedge r) \to A) \to ((A \to p) \to (p \vee (q \wedge r) \to p)),$$

所以

$$\vdash (A \to p) \to (p \vee (q \wedge r) \to p).$$

由命题 9.1.4(iii) 得 $\tau(A \to p) \leqslant \tau(p \vee (q \wedge r) \to p) = \tau(q \wedge r \to p)$. 所以由上例的计算知 $\rho(p, p \vee (q \wedge r)) \leqslant \rho(p, A)$.

下面给出带有误差的 Γ- 结论的第 2 种定义. 其基本思想是:若 B 是 Γ- 结论,则 Γ 有有限子集 $\Sigma = \{A_1, \cdots, A_n\}$ 使 $\Sigma \vdash B$. 由演绎定理,有 $\vdash A_1 \to (A_2 \to (\to \cdots \to (A_n \to B)\cdots))$,即 $\vdash \wedge \Sigma \to B$. 所以由考察 $\wedge \Sigma \to B$ 的真度出发可以给出下面的:

定义 9.1.9 设 $\Gamma \subset F(S)$, $B \in F(S)$, $\varepsilon > 0$. 设

$$1 - \sup\{\tau(\wedge \Sigma \to B) \mid \Sigma \text{ 是 } \Gamma \text{ 的有限子集}\} < \varepsilon, \tag{9.1.28}$$

则称 B 是 Γ 的 **II- 型误差小于 ε 的结论**,简记为 $B \in D_\varepsilon^2(\Gamma)$,这里 $\Sigma = \{A_1, \cdots, A_n\} \subset \Gamma$, $\wedge \Sigma$ 表示 $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n$,且约定空交为 $F(S)$ 中的定理.

设 $B \in D(\Gamma)$,则 Γ 有有限子集 Σ 使 $B \in D(\Sigma)$,这时 $\tau(\wedge \Sigma \to B) = 1$,从而由式(9.1.28) 知对任意的 $\varepsilon > 0$, $B \in D_\varepsilon^2(\Gamma)$.

例 9.1.7 设 $\Gamma = \{p \vee q, p \vee r\}$, $B = p$. 取 $\Sigma_0 = \Gamma$,则

$$\tau(\wedge \Sigma_0 \to p) = \tau(p \vee (q \wedge r) \to p) = \tau(\neg q \vee \neg r \vee p) = \frac{7}{8},$$

所以

$$1 - \sup\{\tau(\wedge \Sigma \to p) \mid \Sigma \text{ 是 } \Gamma \text{ 的有限子集}\} \leqslant 1 - \tau(\wedge \Sigma_0 \to p) = \frac{1}{8} = 0.125,$$

从而 p 是 Γ 的 II- 型误差小于 0.13 的结论.

命题 9.1.15 式(9.1.28) 等价于

$$1 - \sup\{\tau(A \to B) \mid A \in D(\Gamma)\} < \varepsilon. \tag{9.1.29}$$

证明 设 $A \in D(\Gamma)$, $\tau(A \to B) \geqslant \alpha$. 这时 Γ 有有限子集 Σ 使 $\Sigma \vdash A$. 由演绎定理得 $\vdash \wedge \Sigma \to A$,从而 $\tau(\wedge \Sigma \to A) = 1$. 由命题 9.1.4(ii) 即得 $\tau(\wedge \Sigma \to B) \geqslant \alpha$. 反过来,设 Σ 是 Γ 的有限子集且 $\tau(\wedge \Sigma \to B) \geqslant \alpha$. 取 $A = \wedge \Sigma$,则 $A \in D(\Gamma)$ 且 $\tau(A \to B) \geqslant \alpha$. 所以

$$\sup\{\tau(A \to B) \mid A \in D(\Gamma)\} = \sup\{\tau(\wedge \Sigma \to B) \mid \Sigma \text{ 是 } \Gamma \text{ 的有限子集}\}.$$

可见式(9.1.29) 与式(9.1.28) 等价.

注意,初看起来似乎式(9.1.29) 比式(9.1.28) 简单,但实则不然,因为在式(9.1.28) 中的 Σ 取自 Γ,其成员的选取很清楚. 但式(9.1.29) 中的 A 取自 $D(\Gamma)$,而 $D(\Gamma)$ 中都有哪些成员远不如 Γ 中有哪些成员清楚.

命题 9.1.16 设 $\Gamma \subset F(S)$, $B \in F(S)$, $\varepsilon > 0$.

$$\text{若 } B \in D_\varepsilon^1(\Gamma), \text{则 } B \in D_\varepsilon^2(\Gamma). \tag{9.1.30}$$

证明　因为

$$\begin{aligned}\rho(B,D(\Gamma)) &= \inf\{\rho(A,B)\mid A\in D(\Gamma)\}\\ &= \inf\{1-\xi(A,B)\mid A\in D(\Gamma)\}\\ &= 1-\sup\{\xi(A,B)\mid A\in D(\Gamma)\},\end{aligned}\tag{9.1.31}$$

并且

$$\xi(A,B)=\tau((A\to B)\wedge(B\to A))\leqslant\tau(A\to B)\tag{9.1.32}$$

所以由式(9.1.29),式(9.1.31)和式(9.1.32)即得式(9.1.30).

问题 9.1.1　上述命题的逆命题是否成立?即,若 $B\in D_\varepsilon^2(\Gamma)$,是否必有 $B\in D_\varepsilon^1(\Gamma)$?

利用 Hausdorff 距离还可给出带有误差的 Γ-结论的第三种定义.设 $B\in F(S)$,则有许多理论 Γ 都可使得 B 成为 Γ-结论,比如取 $\Gamma=\{B\}$ 就行.设 $\Sigma\vdash B$,即 B 是 Σ-结论,Σ 当然可以和已经给定的 Γ 不同,这时 $D(\Sigma)$ 与 $D(\Gamma)$ 也就可以不同.如果 $D(\Sigma)$ 与 $D(\Gamma)$ 很接近并且 B 是 Σ-结论,则自然可认为 B 是带有一定误差的某种 Γ-结论.

定义 9.1.10　设 $\Gamma\subset F(S)$,$B\in F(S)$,$\varepsilon>0$.设

$$\inf\{H(D(\Gamma),D(\Sigma))\mid\Sigma\subset F(S),\Sigma\vdash B\}<\varepsilon,\tag{9.1.33}$$

这里 H 表示 Hausdorff 距离,则称 B 是 Γ 的 **III-型误差小于 ε 的结论**,简记为 $B\in D_\varepsilon^3(\Gamma)$.

注 9.1.7　设 (X,ρ) 是(伪)度量空间,P,Q 是 X 的非空子集,设

$$\begin{aligned}\rho(x,Q) &= \inf\{\rho(x,y)\mid y\in Q\},\\ H^*(P,Q) &= \sup\{\rho(x,Q)\mid x\in P\},\\ H(P,Q) &= H^*(P,Q)\vee H^*(Q,P).\end{aligned}$$

称 H 为 $\mathscr{P}(X)-\{\varnothing\}$ 上的 Hausdorff **距离**.可以验证 H 确为 $\mathscr{P}(X)-\{\varnothing\}$ 上的伪距离.但 H 不是距离.以 $X=\mathbf{R}^2$ 为例,这时由 $H(P,Q)=0$ 得不出 $P=Q$ 来,只能得出 P 与 Q 的闭包相等.

命题 9.1.17　设 $\Gamma\subset F(S)$,$B\in F(S)$,$\varepsilon>0$.

$$若\ B\in D_\varepsilon^3(\Gamma),则\ B\in D_\varepsilon^1(\Gamma).\tag{9.1.34}$$

证明　设 $B\in D_\varepsilon^3(\Gamma)$,则有式(9.1.33)知有 $\Sigma\subset F(S)$,$\Sigma\vdash B$ 且 $H(D(\Gamma),D(\Sigma))<\varepsilon$.这时 $B\in D(\Sigma)$,所以

$$\rho(B,D(\Gamma))\leqslant H(D(\Gamma),D(\Sigma))<\varepsilon.$$

从而由定义 9.1.7 知 $B\in D_\varepsilon^1(\Gamma)$.

问题 9.1.2　上述命题的逆命题是否成立?即,若 $B\in D_\varepsilon^1(\Gamma)$,是否必有 $B\in D_\varepsilon^3(\Gamma)$?

问题 9.1.3　$B\in D_\varepsilon^2(\Gamma)$ 和 $B\in D_\varepsilon^3(\Gamma)$ 之间有何关系?

本节中提出的三个问题均涉及系统 **L** 中形式推理和伪距离 ρ 结合进行时所引

发的新问题，也均有一定的难度. 比如，设 Γ 和 Σ 是两个不同的理论，在以下意义下 Γ 和 Σ 很相近：即，$D(\Gamma)$ 和 $D(\Sigma)$ 的 Hausdorff 距离很小. 这时若 $B \in D(\Sigma)$，则 Σ 有有限子集 Σ_0 使 $\wedge\ \Sigma_0 \to B$ 的真度等于 1，那么能不能在 Γ 中找出有限子集 Γ_0 使从 Γ_0 推出 B 的真度即使不等于 1 但也很大呢？即，是否可使 $\tau(\wedge\ \Gamma_0 \to B)$ 很大呢？作者尚未得出定论. 这些问题供读者们研究和讨论.

习 题 9.1

1. 求以下各公式的真度：

(i) $A_1 = p \vee q$.

(ii) $A_2 = p \to q \wedge r$.

(iii) $A_3 = p_1 \to (p_2 \to (p_3 \to p_4))$.

2. 在 $F(S)$ 中找出一个公式 A，使 $\tau(A) = \dfrac{29}{32}$.

3. 求公式 A 与 B 之间的相似度和伪距离，设：

(i) $A = p \vee q, B = p \wedge q$.

(ii) $A = p \vee q, B = r \wedge s$.

(iii) $A = p, B = q \wedge r$.

(iv) $A = p \vee q, B = q \wedge r$.

(v) $A = (p \to q) \to r, B = p \to (q \to r)$.

4. 试证 $\rho(A,B) = \tau(A \vee B) - \tau(A \wedge B)$.

5. 求以下各理论的发散度：

(i) $\Gamma_1 = \{p, p \to q, q \to r\}$.

(ii) $\Gamma_2 = \{p \vee q \vee r \to t\}$.

(iii) $\Gamma_3 = \{p_1, p_3, \cdots, p_{2n-1}, \cdots\}$.

(iv) $\Gamma_4 = \{p \to q, \neg p \to \neg q\}$.

6. 求上题中各理论的相容度和 δ- 相容度.

7. 设 Γ 是 $F(S)$ 的有限子集，$B \in F(S)$，试证式(9.1.29) 等价于下式：

$$1 - \tau(\wedge\ \Gamma \to B) < \varepsilon.$$

8. 设 $\Gamma \subset F(S), \varepsilon > 0$. 试证 Γ 有有限子集 Σ 使

$$H(D(\Gamma), D(\Sigma)) < \varepsilon.$$

9.2 多值 Łukasiewicz 命题逻辑系统 Ł$_n$ 与 Łuk 中的计量逻辑理论

以下用 **Ł**$_n$ 表示 n 值 Łukasiewicz 命题逻辑系统，用 **Łuk** 表示赋值域为[0,1]的 Łukasiewicz 命题逻辑系统，也可称 **Łuk** 为 Fuzzy Łukasiewicz 命题逻辑系统.

9.2.1 系统 Ł$_n$ 中公式的真度理论

在第 8 章中已讨论过赋值域为[0,1]的 Łukasiewicz 系统 Łuk. 将其赋值域改为

n 值域 L_n(式(9.2.1)),其余不变,即得 **Ł**$_n$. 与系统 **L** 中的情形类似,也可以基于 **Ł**$_n$ 中逻辑公式所诱导的函数来定义逻辑公式的真度. 仍用 $F(S)$ 表示由 $S = \{p_1, p_2, \cdots\}$ 生成的$(\neg, \rightarrow)$ 型自由代数,即 **Ł**$_n$ 中全体公式之集,只不过如定义 8.4.1 所指出的,$A \vee B$已不再是 $\neg A \rightarrow B$的简写,而是$(A \rightarrow B) \rightarrow B$的简写,$A \oplus B$才是 $\neg A \rightarrow B$的简写. 又,$A \wedge B$表示 $\neg(\neg A \vee \neg B)$. 且在 **Ł**$_n$ 中用$A \otimes B$表示 $\neg(A \rightarrow \neg B)$,易证 $A \otimes B \rightarrow C \sim A \rightarrow (B \rightarrow C)$. 设 $A(p_1, \cdots, p_m)$ 是 $F(S)$ 中含有 m 个原子公式的逻辑公式,则 A 可自然地诱导一个 m 元 n 值函数 $\overline{A}: L_n^m \rightarrow L_n$,这里

$$L_n = \left\{0, \frac{1}{n-1}, \cdots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}. \tag{9.2.1}$$

$\overline{A}(x_1, \cdots, x_m)$ 由运算符号 $\neg$ 与 $\rightarrow$ 将 $x_1, \cdots, x_m$ 连接而成,其方式恰如 $A(p_1, \cdots, p_m)$ 由连接词 $\neg$ 与 $\rightarrow$ 将原子公式 $p_1, \cdots, p_m$ 连接而成那样. 注意这时有(参看命题 8.4.1)

$$\neg x = 1 - x, \quad x \rightarrow y = (1 - x + y) \wedge 1, \quad x, y \in L_n. \tag{9.2.2}$$

与系统 **L** 和 **Łuk** 中的基本概念相同,在系统 **Ł**$_n$ 中仍称$(\neg, \rightarrow)$ 型同态 $v: F(S) \rightarrow L_n$ 为$F(S)$ 的赋值,其全体记为 $\Omega(L_n)$. 设 $A \in F(S)$,若对每个 $v \in \Omega(L_n)$ 均有 $v(A) = 1$,则称 A 为重言式,若对每个 $v \in \Omega(L_n)$ 均有 $v(A) = 0$,则称 A 为矛盾式. 由以上所述公式 $A(p_1, \cdots, p_m)$ 和它所诱导的函数 $\overline{A}(x_1, \cdots, x_m)$ 的关系知对每个 $v \in \Omega(L_n)$, $v(A) = \overline{A}(v(p_1), \cdots, v(p_m))$,所以有如下命题:

命题 9.2.1 设 $A(p_1, \cdots, p_m) \in F(S)$.

(i) A 是重言式当且仅当对每个$(x_1, \cdots, x_m) \in L_n^m$ 均有 $\overline{A}(x_1, \cdots, x_m) = 1$.

(ii) A 是矛盾式当且仅当对每个$(x_1, \cdots, x_m) \in L_n^m$ 均有 $\overline{A}(x_1, \cdots, x_m) = 0$.

重言式与矛盾式仅仅是 $F(S)$ 中两种极特殊的公式,它们分别是完全真实与完全不真实的公式. $F(S)$ 中的绝大多数公式都不在此列. 本节的主旨在于将上述两极化的定义程度化以顾及绝大多数的公式. 在系统 **Ł**$_n$ 中定义公式 A 的真度时仍可利用 A 所诱导的函数$\overline{A}$,但对于 n 值系统 **Ł**$_n$ 而言,情况要比系统 **L** 中复杂许多. 这时我们不但要统计 L_n^m 中有多少个 m 维向量 $x = (x_1, \cdots, x_m)$ 使得 $\overline{A}(x) = 1$,也应当将那些虽然不能使 $\overline{A}$ 取得最大值 1 但可使 $\overline{A}(x) = \frac{n-2}{n-1}, \frac{n-3}{n-1}, \cdots$ 的 x 所占的份额统计在内. 当然这些x的重要性不能和满足条件$\overline{A}(x) = 1$的x同等看等. 一个既自然又合理的方法是采用加权求和的方法. 因为$|L_n^m| = n^m$,所以我们有

定义 9.2.1 设 $A(p_1, \cdots, p_m)$ 是系统 **Ł**$_n$ 中含有 m 个原子命题 $p_1, \cdots, p_m$ 的公式,则 A 的真度 $\tau_{L_n}(A)$ 定义如下:

$$\tau_{L_n}(A) = \frac{1}{n^m} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{n-1} \left| \overline{A}^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right) \right|. \tag{9.2.3}$$

除记号不同外,式(9.1.1) 显然是式(9.2.3) 的特殊情形.

例 9.2.1 在系统 $Ł_3$ 中求公式 $p, \neg p \vee p, p \wedge q, p \to q$ 和 $p \wedge q \wedge r$ 的真度.

解 (i)p 所诱导的函数为 $\bar{p} = x: \{0, \frac{1}{2}, 1\} \to \{0, \frac{1}{2}, 1\}$，这里 $\bar{p}(x) = x$，所以 $|\bar{p}^{-1}(1)| = 1$，$\left|\bar{p}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right| = 1$. 由式(9.2.3)得 $\tau_{L_3}(p) = \frac{1}{3^1}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

(ii) $\overline{p \vee \neg p}(x) = \max\{x, 1-x\}$. 易验证 $|\overline{p \vee \neg p}^{-1}(1)| = 2$，$\left|\overline{p \vee \neg p}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right| = 1$，所以由式(9.2.3)得 $\tau_{L_3}(p \vee \neg p) = \frac{1}{3}\left(2 + \frac{1}{2} \times 1\right) = \frac{5}{6}$. 这与二值逻辑中 $\tau(p \vee \neg p) = 1$ 不同.

(iii) $\overline{p \wedge q}(x, y) = x \wedge y = \min\{x, y\}$(参看 8.3 ~ 8.4 节)，易验证 $|\overline{p \wedge q}^{-1}(1)| = 1$，$\left|\overline{p \wedge q}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right| = 3$，所以由式(9.2.3)得 $\tau_{L_3}(p \wedge q) = \frac{1}{3^2}\left(1 + \frac{3}{2}\right) = \frac{5}{18}$.

(iv) $\overline{p \to q}(x, y) = x \to y = (1 - x + y) \wedge 1$，$|\overline{p \wedge q}^{-1}(1)| = 6$，$\left|\overline{p \wedge q}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right| = 2$，所以由式(9.2.3)得 $\tau_{L_3}(p \to q) = \frac{1}{3^2}\left(6 + \frac{2}{2}\right) = \frac{7}{9}$.

(v) $\overline{p \wedge q \wedge r}(x, y, z) = \min\{x, y, z\}$，$|\overline{p \wedge q \wedge r}^{-1}(1)| = 1$，$\left|\overline{p \wedge q \wedge r}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right| = 7$，所以 $\tau_{L_3}(p \wedge q \wedge r) = \frac{1}{3^3}\left(1 + \frac{7}{2}\right) = \frac{1}{6}$.

例 9.2.2 在系统 $Ł_n$ 中求出公式 $p, p \to q$ 和 $p \vee q$ 的真度.

解 (i)$\bar{p}(x) = x$. $\tau_{L_n}(p) = \frac{1}{n^1}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{n-1}\left|\bar{p}^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)\right| = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{n-1} = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{1}{n(n-1)} \cdot \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2}$.

(ii) $\overline{p \to q}(x, y) = (1 - x + y) \wedge 1$. $|\overline{p \to q}^{-1}(1)| = |\{(x, y) \mid x \leqslant y, (x, y) \in L_n^2\}| = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. 又，当 $0 < i < n-1$ 时解方程

$$1 - \frac{s}{n-1} + \frac{t}{n-1} = \frac{i}{n-1}$$

可求出共有 $i + 1$ 个满足条件 $0 \leqslant s, t \leqslant n - 1$ 的整数对 (s, t)，即，$\left|\overline{p \to q}^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)\right| = i + 1$，所以由式(9.2.3)得

$$\begin{aligned}\tau_{L_n}(p \to q) &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{n-1}\left|\overline{p \to q}^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)\right| \\ &= \frac{1}{n^2(n-1)}\left(\frac{n(n+1)(n-1)}{2} + \sum_{i=1}^{n-2} i(i+1)\right)\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{6n^2(n-1)}(5n^2-n)(n-1) = \frac{5n-1}{6n}. \tag{9.2.4}$$

(iii) $\overline{p \vee q}(x,y) = \max\{x,y\}$，$\left|\overline{p \vee q}^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)\right| = 2i+1$，所以

$$\tau_{L_n}(p \vee q) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{n-1}(2i+1) = \frac{4n+1}{6n}. \tag{9.2.5}$$

下面的命题和命题 9.1.2 一样是显然成立的：

命题 9.2.2　在系统 Ł_n 中，若 $A \approx B(A \sim B)$，则 $\tau_{L_n}(A) = \tau_{L_n}(B)$.

可以证明命题 9.1.3 对系统 Ł_n 仍成立. 为此我们需要一个引理.

引理 9.2.1　设 $f,g: X \to \{0,1,\cdots,n-1\}$ 是定义在非空有限集 X 上的函数，$0 \leqslant i \leqslant n-1$，则

$$|(f \vee g)^{-1}(i)| + |(f \wedge g)^{-1}(i)| = |f^{-1}(i)| + |g^{-1}(i)|. \tag{9.2.6}$$

证明　设

$U = \{x \in X \mid f(x) = i \text{ 且 } g(x) \leqslant i\}$，

$V = \{x \in X \mid g(x) = i \text{ 且 } f(x) < i\}$，

$Y = \{x \in X \mid f(x) = i \text{ 且 } g(x) > i\}$，

$Z = \{x \in X \mid g(x) = i \text{ 且 } f(x) \geqslant i\}$.

以下各式是显然的：

$U \cap V = Y \cap Z = U \cap Y = V \cap Z = \varnothing$.

$f^{-1}(i) = U \cup Y, g^{-1}(i) = V \cup Z$.

$(f \vee g)^{-1}(i) = U \cup V, (f \wedge g)^{-1}(i) = Y \cup Z$.

由以上各式得

$|f^{-1}(i)| = |U| + |Y|, |g^{-1}(i)| = |V| + |Z|$.

$|(f \vee g)^{-1}(i)| = |U| + |V|, |(f \wedge g)^{-1}(i)| = |Y| + |Z|$.

所以式(9.2.6)成立.

命题 9.2.3　在系统 Ł_n 中，设 $A,B \in F(S)$，则

$$\tau_{L_n}(A \vee B) = \tau_{L_n}(A) + \tau_{L_n}(B) - \tau_{L_n}(A \wedge B). \tag{9.2.7}$$

证明　不妨设 A 与 B 均含有 m 个原子公式 $p_1,\cdots,p_m$. 设 $X = L_n^m$，$f = (n-1)\overline{A}$，$g = (n-1)\overline{B}$，则得函数 $f,g: X \to \{0,1,\cdots,n-1\}$，这时 $(f \vee g)^{-1}(i) = \overline{A \vee B}^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)$，$(f \wedge g)^{-1}(i) = \overline{A \wedge B}^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)$，$f^{-1}(i) = \overline{A}^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)$，$g^{-1}(i) = \overline{B}^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)$，所以由式(9.2.6)得

$$\left|\overline{A \vee B}^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)\right| + \left|\overline{A \wedge B}^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)\right| = \left|\overline{A}^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)\right| + \left|\overline{B}^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)\right|,$$

$0 \leqslant i \leqslant n-1$.

由此可得

$$\frac{1}{n^m}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{n-1}\left|\overline{A\vee B}^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)\right|+\frac{1}{n^m}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{n-1}\left|\overline{A\wedge B}^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)\right|$$

$$=\frac{1}{n^m}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{n-1}\left|\overline{A}^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)\right|+\frac{1}{n^m}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{n-1}\left|\overline{B}^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)\right|,$$

即

$$\tau_{L_n}(A\vee B)+\tau_{L_n}(A\wedge B)=\tau_{L_n}(A)+\tau_{L_n}(B). \tag{9.2.8}$$

由式(9.2.8)即得式(9.2.7).

在系统 $Ł_n$ 中推论 9.1.2 的结论仍然成立,但它不能像当初那样作为式(9.2.7)的推论得出,因为从例 9.2.1(ii) 看出,当 $n>2$ 时 $\tau_{L_n}(A\vee\neg A)=1$ 已不再成立,$\tau_{L_n}(A\wedge\neg A)=0$ 也不再成立.现在需要重新证明.

命题 9.2.4 在系统 $Ł_n$ 中,设 $A\in F(S)$,则

$$\tau_{L_n}(\neg A)=1-\tau_{L_n}(A). \tag{9.2.9}$$

证明 注意,式(9.2.3)也可写为

$$\tau_{L_n}(A)=\frac{1}{n^m}\sum_{i=0}^{n-1}\left(1-\frac{i}{n-1}\right)\left|\overline{A}^{-1}\left(1-\frac{i}{n-1}\right)\right|. \tag{9.2.10}$$

这是因为:首先,在式(9.2.3)中 i 也可从 0 算起,因为这时 $\frac{i}{n-1}=0$.其次,令 $i=n-1-j$.则有

$$\tau_{L_n}(A)=\frac{1}{n^m}\sum_{j=n-1}^{0}\left(1-\frac{j}{n-1}\right)\left|\overline{A}^{-1}\left(1-\frac{j}{n-1}\right)\right|. \tag{9.2.11}$$

最后,在式(9.2.11)中将 j 改写为 i 并让求和顺序改为从小到大就得到式(9.2.10).

由 A 和 $\neg A$ 的关系知 $\overline{A}(x)=\frac{i}{n-1}$,当且仅当 $\overline{\neg A}(x)=1-\frac{i}{n-1}$ $(i=0,1,\cdots,n-1,x\in L_n^m)$,即

$$\overline{A}^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)=\overline{\neg A}^{-1}\left(1-\frac{i}{n-1}\right),\quad i=0,1,\cdots,n-1. \tag{9.2.12}$$

在计算 $\tau_{L_n}(A)$ 时使用式(9.2.3)而在计算 $\tau_{L_n}(\neg A)$ 时使用式(9.2.10).则由式(9.2.12)得

$$\begin{aligned}&\tau_{L_n}(A)+\tau_{L_n}(\neg A)\\&=\frac{1}{n^m}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{i}{n-1}\left|\overline{A}^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)\right|+\frac{1}{n^m}\sum_{i=0}^{n-1}\left(1-\frac{i}{n-1}\right)\left|\overline{\neg A}^{-1}\left(1-\frac{i}{n-1}\right)\right|\\&=\frac{1}{n^m}\sum_{i=0}^{n-1}\left\{\frac{i}{n-1}\left|\overline{A}^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)\right|+\left(1-\frac{i}{n-1}\right)\left|\overline{A}^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)\right|\right\}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n^m} \sum_{i=0}^{n-1} \left| \overline{A}^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right) \right| \tag{9.2.13}$$

因为 L_n^m 可表示为两两不相交的 n 个集

$$\overline{A}^{-1}(0), \overline{A}^{-1}\left(\frac{1}{n-1}\right), \cdots, \overline{A}^{-1}\left(\frac{n-2}{n-1}\right), \overline{A}^{-1}(1)$$

之并，所以

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left| \overline{A}^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right) \right| = |L_n^m| = n^m. \tag{9.2.14}$$

由式(9.2.13) 和式(9.2.14) 即得

$$\tau_{L_n}(A) + \tau_{L_n}(\neg A) = 1.$$

这就证明了命题 9.2.4.

命题9.1.4的结论对系统 Ł_n 而言仍成立. 为了证明这一点，我们先给出 $\tau_{L_n}(A)$ 的积分表示形式.

9.2.2 系统 Ł$_n$ 中公式真度的积分表示

因为 $L_n = \left\{0, \frac{1}{n-1}, \cdots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}$，所以 L_n^m 是一个由 n^m 个元素组成的均匀分布的 m 维点阵，即

$$L_n^m = \{x = (x_1, \cdots, x_m) \mid x_k \in L_n, 1 \leqslant k \leqslant m\}. \tag{9.2.15}$$

以下的关键技巧在于将 L_n^m 中的每个点均转化为一个 m 维的小方体，使其体积之和等于$[0,1]^m$ 的体积 1. 为此可在$[0,1]$ 中加入 $n-1$ 个分点$\frac{1}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}$，则$[0,1]$ 被分成 n 等分，这些点自然不属于 L_n. 设 $\alpha_k \in \left\{0, \frac{1}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}\right\} (k = 1, \cdots, m)$，则

$$\frac{n}{n-1}(\alpha_1, \cdots, \alpha_m) = \left(\frac{n}{n-1}\alpha_1, \cdots, \frac{n}{n-1}\alpha_m\right) \in L_n^m. \tag{9.2.16}$$

定义

$$\begin{aligned} &\text{cube}(\alpha_1, \cdots, \alpha_m) \\ &= \left\{ y = (y_1, \cdots, y_m) \in [0,1]^m \mid y_k \in \left[\alpha_k, \alpha_k + \frac{1}{n}\right), k = 1, \cdots, m \right\}, \\ &\qquad \alpha_k = 0, \frac{1}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}, k = 1, \cdots, m. \end{aligned} \tag{9.2.17}$$

则容易看出$\left\{\text{cube}(\alpha_1, \cdots, \alpha_m) \,\middle|\, \frac{n}{n-1}(\alpha_1, \cdots, \alpha_m) \in L_n^m\right\}$是 n^m 个两两不相交的体积等于$\frac{1}{n^m}$ 的小方体之集，并且

$$\bigcup \left\{\text{cube}(\alpha_1, \cdots, \alpha_m) \,\middle|\, \frac{n}{n-1}(\alpha_1, \cdots, \alpha_m) \in L_n^m\right\} = [0,1)^m. \tag{9.2.18}$$

如前所述，设 $A(p_1, \cdots, p_m)$ 是系统 Ł_n 中含有 m 个原子公式的公式，则 A 诱导

一个函数 $\overline{A}: L_n^m \to L_n$. 为给出 A 的真度的积分表示式，以下需要引入 A 在 $[0,1]^m$ 上诱导的阶梯函数 $\overline{\overline{A}}_n$.

定义 9.2.2 设 $A(p_1,\cdots,p_m) \in F(S)$. 定义 $\overline{\overline{A}}_n:[0,1]^m \to [0,1]$ 如下：

$$\overline{\overline{A}}_n(y_1,\cdots,y_m) = \frac{i}{n-1} \text{ 当且仅当}(y_1,\cdots,y_m) \in \text{cube}(\alpha_1,\cdots,\alpha_m). \tag{9.2.19}$$

这里

$$\overline{A}\left(\frac{n}{n-1}\alpha_1,\cdots,\frac{n}{n-1}\alpha_m\right) = \frac{i}{n-1}, \quad i = 0,1,\cdots,n-1. \tag{9.2.20}$$

称 $\overline{\overline{A}}_n$ 为 A **在$[0,1]^m$ 上诱导的阶梯函数**.

命题9.2.5 在系统 Ł_n 中，设 $A(p_1,\cdots,p_m)$ 是含有 m 个原子公式 $p_1,\cdots,p_m$ 的公式，则

$$\tau_{L_n}(A) = \int_{[0,1]^m} \overline{\overline{A}}_n(y_1,\cdots,y_m)\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_m. \tag{9.2.21}$$

证明 注意每个 cube$(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$ 的体积都等于 $\frac{1}{n^m}$. 令

$$\sigma_i = \bigcup \left\{\text{cube}(\alpha_1,\cdots,\alpha_m) \,\middle|\, \overline{A}\left(\frac{n}{n-1}\alpha_1,\cdots,\frac{n}{n-1}\alpha_m\right) = \frac{i}{n-1}\right\}, i = 0,1,\cdots,n-1,$$

则 $\sigma_0,\sigma_1,\cdots,\sigma_{n-1}$ 两两不相交且 σ_i 的体积为

$$\mu(\sigma_i) = \left|\overline{A}^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)\right| \cdot \frac{1}{n^m}, \bigcup_{i=0}^{n-1} \sigma_i = [0,1)^m. \tag{9.2.22}$$

由式(9.2.3) 和式(9.2.22) 得

$$\tau_{L_n}(A) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n-1}\mu(\sigma_i). \tag{9.2.23}$$

又，由式(9.2.19)、式(9.2.20) 和式(9.2.22) 知

$$\overline{\overline{A}}_n(y_1,\cdots,y_m) = \frac{i}{n-1} \text{ 当且仅当}(y_1,\cdots,y_m) \in \sigma_i, \quad i = 0,1,\cdots,n-1. \tag{9.2.24}$$

所以由式(9.2.23)、式(9.2.24) 和式(9.2.22) 得

$$\begin{aligned}\tau_{L_n}(A) &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n-1}\mu(\sigma_i) = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{\sigma_i}\overline{\overline{A}}_n\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_m \\ &= \int_{[0,1)^m} \overline{\overline{A}}_n(y_1,\cdots,y_m)\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_m = \int_{[0,1]^m} \overline{\overline{A}}_n(y_1,\cdots,y_m)\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_m.\end{aligned}$$

关于命题 9.2.5 已得到证明①

---

① 王国俊，李璧镜. Łukasiewicz n 值命题逻辑中公式的真度理论和极限定理. 中国科学，E 辑，2005，(35)，6，561 ～ 569.

不难验证

$$\overline{\overline{\neg A}} = 1 - \overline{\overline{A}}, \quad \overline{\overline{A \vee B}} = \overline{\overline{A}} \vee \overline{\overline{B}}, \quad \overline{\overline{A \to B}} = \overline{\overline{A}} \to \overline{\overline{B}}. \tag{9.2.25}$$

由此以及命题 9.2.5 易证下面的命题.

命题 9.2.6　在系统 $Ł_n$ 中,设 $A,B,C \in F(S)$,$\alpha,\beta \in [0,1]$.

(i) 若 $\tau_{L_n}(A) \geqslant \alpha$,$\tau_{L_n}(A \to B) \geqslant \beta$,则 $\tau_{L_n}(B) \geqslant \alpha + \beta - 1$.

(ii) $\tau_{L_n}(A \to B) \geqslant \alpha$,$\tau_{L_n}(B \to C) \geqslant \beta$,则 $\tau_{L_n}(A \to C) \geqslant \alpha + \beta - 1$.

(iii) 若 $\vdash A \to B$,则 $\tau_{L_n}(A) \leqslant \tau_{L_n}(B)$.

证明　以(ii)为例进行证明.不妨设 A,B,C 都含有 m 个原子公式 $p_1,\cdots,p_m$.分别把 $[0,1]^m$ 和 $dy_1\cdots dy_m$ 简记为 Δ 和 dw,则由命题 9.2.5 知

$$\int_\Delta \overline{\overline{(A \to B)}}_n dw \geqslant \alpha, \qquad \int_\Delta \overline{\overline{(B \to C)}}_n dw \geqslant \beta.$$

由式(9.2.25),即

$$\int_\Delta (1 - \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}})_n \wedge 1\, dw \geqslant \alpha, \qquad \int_\Delta (1 - \overline{\overline{B}} + \overline{\overline{C}})_n \wedge 1\, dw \geqslant \beta. \tag{9.2.26}$$

易验证

$$(1 - a + c) \wedge 1 \geqslant (1 - a + b) \wedge 1 + (1 - b + c) \wedge 1 - 1, \quad a,b,c \in [0,1]. \tag{9.2.27}$$

由式(9.2.26)和式(9.2.27)即得

$$\begin{aligned}\tau_{L_n}(A \to C) &= \int_\Delta \overline{\overline{(A \to C)}}_n dw = \int_\Delta (1 - \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{C}})_n \wedge 1 dw \\ &\geqslant \int_\Delta (1 - \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}})_n \wedge 1 dw + \int_\Delta (1 - \overline{\overline{B}} + \overline{\overline{C}})_n \wedge 1 dw - 1 \\ &\geqslant \alpha + \beta - 1.\end{aligned}$$

9.2.3　系统 $Ł_n$ 中公式间的相似度与伪距离

和二值逻辑 **L** 中的情形一样,可以在系统 $Ł_n$ 中引入公式间的相似度与伪距离.

定义 9.2.3　在系统 $Ł_n$ 中,设 $A,B \in F(S)$,令

$$\xi_{L_n}(A,B) = \tau_{L_n}((A \to B) \wedge (B \to A)),$$

称 $\xi_{L_n}(A,B)$ 为公式 A 与 B 之间的**相似度**.

例 9.2.3　在系统 $Ł_3$ 中计算公式 A 与 B 之间的相似度,设:

(i) $A = p, B = q$.

(ii) $A = p, B = \neg p$.

(iii) $A = p, B = \neg p \to q$.

这里 p 与 q 是不同的原子公式.

解　(i) $\xi_{L_3}(A,B) = \xi_{L_3}(p,q) = \tau_{L_3}((p \to q) \wedge (q \to p))$.这时

$$\left|\overline{(p \to q) \wedge (q \to p)}^{-1}(1)\right| = 3,$$
$$\left|\overline{(p \to q) \wedge (q \to p)}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right| = 4,$$

所以由式(9.2.3)得 $\xi_{L_3}(A,B) = \frac{1}{9}\left(3 + \frac{1}{2} \times 4\right) = \frac{5}{9}$.

(ii) 因为

$$\left|\overline{(p \to \neg p) \wedge (\neg p \to p)}^{-1}(1)\right| = 1,$$
$$\left|\overline{(p \to \neg p) \wedge (\neg p \to p)}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right| = 0,$$

所以 $\xi_{L_3}(p,\neg p) = \frac{1}{3}$.

(iii) 易验证

$$\left|\overline{(p \to (\neg p \to q)) \wedge ((\neg p \to q) \to p)}^{-1}(1)\right| = 5,$$
$$\left|\overline{(p \to (\neg p \to q)) \wedge ((\neg p \to q) \to p)}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right| = 3.$$

所以 $\xi_{L_3}(p,\neg p \to q) = \frac{1}{9}\left(5 + 3 \times \frac{1}{2}\right) = \frac{13}{18}$.

命题 9.2.7 在系统 Ł_n 中,设 $A,B,C \in F(S)$,则:

(i) $\xi_{L_n}(A,B) = 1$ 当且仅当 $A \approx B$.

(ii) $\xi_{L_n}(A,B) = 0$ 当且仅当 A 与 B 之一为重言式,另一为矛盾式.

(iii) $\xi_{L_n}(A,B) + \xi_{L_n}(B,C) \leqslant \xi_{L_n}(A,C) + 1$.

证明 不妨设 A,B,C 均含有相同的原子公式 $p_1,\cdots,p_m$.

(i) 由定义 9.2.3 和命题 9.2.5 知 $\xi_{L_n}(A,B) = 1$ 等价于

$$\int_{[0,1]^m} (\overline{A} \to \overline{B})_n \wedge (\overline{B} \to \overline{A})_n \mathrm{d}y_1 \cdots \mathrm{d}y_m = 1. \tag{9.2.28}$$

由$(\overline{A} \to \overline{B})_n \wedge (\overline{B} \to \overline{A})_n$ 是取值于$[0,1]$的阶梯函数知式(9.2.28)等价于$(\overline{A} \to \overline{B})_n \wedge (\overline{B} \to \overline{A})_n$ 在$[0,1]^m$ 上恒等于1.而这又等价于 $\overline{A}_n = \overline{B}_n$ 在$[0,1]^m$ 上恒成立,也等价于 $\overline{A}_n = \overline{B}_n$ 在 L_n^m 上恒成立,即,$A \approx B$.

(ii) $\xi_{L_n}(A,B) = 0$,即 $\int_{[0,1]^m} (\overline{A} \to \overline{B})_n \wedge (\overline{B} \to \overline{A})_n \mathrm{d}y_1 \cdots \mathrm{d}y_m = 0$. 如果 A 既非矛盾式又非重言式,则在某小方体上 $0 < \overline{A} < 1$,这时阶梯函数$(\overline{A} \to \overline{B})_n \wedge (\overline{B} \to \overline{A})_n$ 将取正值从而导出上述积分不等于 0 的矛盾. 又,A 与 B 显然不能同为重言式或矛盾式,所以(ii) 成立.

(iii) 设 $a,b,c \in [0,1]$,可分别考虑 a,b,c 的大小顺序而证明

$$(a \to b) \wedge (b \to a) + (b \to c) \wedge (c \to b) - (a \to c) \wedge (c \to a) \leqslant 1. \tag{9.2.29}$$

由此可知

$$\int_{[0,1]^m} (\overline{A} \to \overline{B})_n \wedge (\overline{B} \to \overline{A})_n \mathrm{d}y_1 \cdots \mathrm{d}y_m + \int_{[0,1]^m} (\overline{B} \to \overline{C})_n \wedge (\overline{C} \to \overline{B})_n \mathrm{d}y_1 \cdots \mathrm{d}y_m$$
$$- \int_{[0,1]^m} (\overline{A} \to \overline{C})_n \wedge (\overline{C} \to \overline{A})_n \mathrm{d}y_1 \cdots \mathrm{d}y_m \leqslant 1.$$

由定义 9.2.3 和命题 9.2.5 知上式即

$$\xi_{L_n}(A,B) + \xi_{L_n}(B,C) - \xi_{L_n}(A,C) \leqslant 1.$$

所以(iii) 成立.

注 9.2.1 在系统 L 中成立的公式 $\xi(A,B)+\xi(A,\neg B)=1$ 在系统 Ł_n 中不再成立. 比如,设 $A=p, B=q$,则由例 9.2.3(i) 知 $\xi_{L_3}(p,q)=\frac{5}{9}$. 又,易验证 $\xi_{L_3}(p,\neg q)=\frac{5}{9}$. 所以上面所说的公式在 Ł_n 中($n>2$) 不再成立.

定义 9.2.4 在系统 Ł_n 中定义函数 $\rho_{L_n}: F(S)\times F(S)\to[0,1]$ 如下:

$$\rho_{L_n}(A,B) = 1-\xi_{L_n}(A,B), \quad A,B\in F(S), \tag{9.2.30}$$

则由命题 9.2.7(iii) 知 ρ_{L_n} 是 $F(S)$ 上的伪距离. 称 ρ_{L_n} 为系统 Ł_n 中 $F(S)$ 上的**自然伪距离**,简称**伪距离**. 又,在不致混淆时也可将 ρ_{L_n} 简写为 ρ.

容易直接验证下面的命题.

命题 9.2.8 在系统 Ł_n 中,设 $A,B\in F(S)$,用 $\overline{0}$ 表示矛盾式,则:

(i) $\rho(A,B)=0$ 当且仅当 $A\approx B$.

(ii) $\rho(A,B)=1$ 当且仅当 A 与 B 之一为重言式且另一为矛盾式.

(iii) $\rho(A,\overline{0})=\tau_{L_n}(A)$.

例 9.2.4 在系统 Ł_n 中,设 $A,B\in F(S)$,求 $\rho(A,B)$,这里:

(i) $A=p, B=q$.

(ii) $A=p\vee q, B=p\wedge q$.

(iii) $A=p_1\wedge\cdots\wedge p_m, B=\overline{0}$.

以上 $p,q,p_1,\cdots,p_m$ 是互不相同的原子公式,$\overline{0}$ 表示矛盾式.

解 (i) $\rho(A,B)=1-\xi_{L_n}(p,q)=1-\tau_{L_n}((p\to q)\wedge(q\to p))$. 相应的函数为 $f(x,y)=(x\to y)\wedge(y\to x)=(1-x+y)\wedge(1-y+x)$. 设 $f(x,y)=1=\frac{n-1}{n-1}$,则 $x=y$ 且反之亦然,所以 $f^{-1}(1)=\{(x,x)\mid x\in L_n\}$, $|f^{-1}(1)|=n$. 设 $f(x,y)=\frac{i}{n-1}(0\leqslant i<n-1)$. 解此方程得

$$\begin{cases} x = 0, \dfrac{1}{n-1}, \cdots, \dfrac{i}{n-1}, \\ y = 1 - \dfrac{i}{n-1}, 1 - \dfrac{i-1}{n-1}, \cdots, 1. \end{cases} \text{或} \begin{cases} y = 0, \dfrac{1}{n-1}, \cdots, \dfrac{i}{n-1}, \\ x = 1 - \dfrac{i}{n-1}, 1 - \dfrac{i-1}{n-1}, \cdots, 1. \end{cases} \tag{9.2.31}$$

这里共有 $2(i+1)$ 组解. 可以证明这是 $f(x,y) = \dfrac{i}{n-1}$ 的全部解. 事实上，在上式中 x 从 0 增大到 $\dfrac{i}{n-1}$，再从 $1-\dfrac{i}{n-1}$ 增加到 1，那么在 $\dfrac{i}{n-1}$ 与 $1-\dfrac{i}{n-1}$ 之间还有没有可能与某 y 相配对而成为方程的解的 x 呢?设有这种 x，即

$$\frac{i}{n-1} < x < 1 - \frac{i}{n-1}. \tag{9.2.32}$$

如果相应的 y 满足 $x \leqslant y$，则由

$$(1 - x + y) \wedge (1 - y + x) = \frac{i}{n-1} \tag{9.2.33}$$

将得出 $1 - y + x = \dfrac{i}{n-1}$，从而由式(9.2.32) 得

$$y = 1 + x - \frac{i}{n-1} > 1 + \frac{i}{n-1} - \frac{i}{n-1} = 1.$$

矛盾!如果相应的 y 满足 $y \leqslant x$，则由式(9.2.33) 得 $1 - x + y = \dfrac{i}{n-1}$，从而由式(9.2.32) 得

$$y = \frac{i}{n-1} + x - 1 < \frac{i}{n-1} + \left(1 - \frac{i}{n-1}\right) - 1 = 0.$$

又为矛盾! 可见方程(9.2.33) 没有满足条件(9.2.32) 的解(x,y). 当然，在式(9.2.31) 中 $\dfrac{i}{n-1} \geqslant 1 - \dfrac{i}{n-1}$ 也是可能的，但前后各 $i+1$ 组解中没有重复出现的，这是因为在第一组解中 x 从 0 递增到 $\dfrac{i}{n-1}$，同时 y 从 $1-\dfrac{i}{n-1}$ 递增到 1，其中每一对(x,y) 均满足 $x < y$. 事实上，设 $x = \dfrac{k}{n-1}$，则相应的 $y = 1 - \dfrac{i-k}{n-1} (0 \leqslant k \leqslant i)$. 由 $i < n-1$ 得 $y > 1 - \dfrac{n-1-k}{n-1} = \dfrac{k}{n-1} = x$. 类似地可以验证在第二个 $i+1$ 组解中 $y < x$. 所以式(9.2.31) 没有方程 $f(x,y) = \dfrac{i}{n-1}$ 的重复解$(0 \leqslant i < n-1)$. 由以上分析得

$$\left| f^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right) \right| = 2(i+1), \quad i = 0, 1, \cdots, n-2. \tag{9.2.34}$$

所以由式(9.2.3) 得

$$\tau_{L_n}((p\to q)\wedge(q\to p))=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n-2}\frac{i}{n-1}\cdot 2(i+1)+\frac{1}{n^2}\cdot n$$
$$=\frac{1}{n^2}\left(\frac{2n(n-2)}{3}+n\right)=\frac{2n-1}{3n},\tag{9.2.35}$$

从而

$$\rho(p,q)=1-\frac{2n-1}{3n}=\frac{n+1}{3n}.\tag{9.2.36}$$

(ii) 因为

$(p\vee q\to p\wedge q)\wedge(p\wedge q\to p\vee q)\sim(p\vee q\to p\wedge q)\sim(p\to q)\wedge(q\to p)$.
所以 $\xi_{L_n}(p\vee q,p\wedge q)=\xi_{L_n}(p,q)$. 由(i)得

$$\rho(p\vee q,p\wedge q)=\rho(p,q)=\frac{n+1}{3n}.\tag{9.2.37}$$

(iii) 由命题 9.2.8(iii) 知 $\rho(p_1\wedge\cdots\wedge p_m,\bar{0})=\tau_{L_n}(p_1\wedge\cdots\wedge p_m)$，所以以下只需计算 $p_1\wedge\cdots\wedge p_m$ 所诱导的函数 $x_1\wedge\cdots\wedge x_m$ 所满足的方程

$$x_1\wedge\cdots\wedge x_m=\frac{i}{n-1},\quad i=0,1,\cdots,n-1\tag{9.2.38}$$

的解的个数. 设在 $x_1,\cdots,x_m$ 中有 j 个等于 $\frac{i}{n-1}$，其余 $m-j$ 个均大于 $\frac{i}{n-1}$，这种向量 $x=(x_1,\cdots,x_m)$ 的个数为 $C_m^j\cdot(n-1-i)^{m-j}$. 所以方程(9.2.38)的解的个数为

$$\left|\overline{p_1\wedge\cdots\wedge p_m}^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)\right|=\sum_{j=1}^{m}C_m^j(n-1-i)^{m-j}$$
$$=[(n-1-i)+1]^m-(n-1-i)^m$$
$$=(n-i)^m-(n-i-1)^m.$$

由式(9.2.3)即得

$$\tau_{L_n}(p_1\wedge\cdots\wedge p_m)=\frac{1}{n^m}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{n-1}[(n-i)^m-(n-i-1)^m]$$
$$=\frac{1}{n^m(n-1)}[(n-1)^m+(n-2)^m+\cdots+1^m]$$
$$=\frac{1}{n^m(n-1)}\sum_{k=1}^{n-1}k^m.\tag{9.2.39}$$

特别当 $n=3,m=2$ 时有 $\tau_{L_3}(p\wedge q)=\frac{5}{18}$，与例 9.2.1(iii) 中的结果一致. 总之，在系统 $\mathbf{Ł}_n$ 中，

$$\rho(p_1\wedge\cdots\wedge p_m,\bar{0})=\frac{1}{n^m(n-1)}\sum_{k=1}^{n-1}k^m.\tag{9.2.40}$$

请读者证明在系统 $\mathbf{Ł}_n$ 中 $F(S)$ 中的运算 $\neg$, $\to$, $\otimes$, $\wedge$, $\vee$ 等关于 ρ_{L_n} 都是连续的(参看命题 9.3.7).

9.2.4 系统 Ł$_n$ 中理论 Γ 的发散度与相容度

在系统 Ł$_n$ 中，仍用 $D(\Gamma)$ 表示全体 Γ-结论之集. 如在 9.1.4 小节所说，在伪距离空间$(F(S),\rho)$ 中，$D(\Gamma)$ 的直径越小表示 Γ-结论越接近定理、越远离矛盾式，而 $D(\Gamma)$ 的直径越大，则 Γ-结论中就有接近矛盾式的公式，所以可像系统 **L** 中的情形一样引入理论 Γ 的发散度与相容度.

定义 9.2.5 在系统 Ł$_n$ 中，设 $\Gamma \subset F(S)$，令

$$\mathrm{div}_{L_n}(\Gamma) = \sup\{\rho(A,B) \mid A,B \in D(\Gamma)\}, \tag{9.2.41}$$

称 $\mathrm{div}_{L_n}(\Gamma)$ 为 Γ 的**发散度**. 称发散度等于 1 的 Γ 为**全发散**的.

重新考虑例 9.1.4 在 Ł$_n$ 中的结果.

例 9.2.5 计算以下各理论在 Ł$_n$ 中的发散度.

(i) $\Gamma = \{p, \neg p\}$.

(ii) $\Gamma = \{p\}$.

(iii) $\Gamma = S = \{p_1, p_2, \cdots\}$.

解 (i) 在系统 Ł$_n$ 中，易证 $p \to (\neg p \to \bar{0})$ 为定理，所以 $\bar{0} \in D(\{p, \neg p\})$. 又，$D(\Gamma)$ 中含有定理，所以 $\mathrm{div}_{L_n}(\Gamma) = 1$，即，$\{p, \neg p\}$ 是全发散的.

(ii) 在系统 Ł$_n$ 中 $\Gamma = \{p\}$ 的发散度的计算比系统 **L** 中的同一问题的计算要复杂得多. 这是因为，首先，下面的事实成立：

$$\{A\} \vdash A^k, A \in F(S), \quad k = 1,2,\cdots \tag{9.2.42}$$

这里

$$A^2 = A \otimes A = \neg(A \to \neg A), \quad A^{k+1} = A^k \otimes A, \quad k = 1,2,\cdots \tag{9.2.43}$$

这可利用系统 Ł$_n$ 中的可证等价式 $A \to (B \to C) \sim A \otimes B \to C$ 加以证明. 其次，设 $v: F(S) \to L_n$ 是赋值，则

$$v(A^k) = 1 - [k(1 - v(A))] \wedge 1, \quad k = 1,2,\cdots \tag{9.2.44}$$

事实上，上式当 $k = 1$ 时显然成立. 设式(9.2.44) 对 k 已成立，则

$$\begin{aligned} v(A^{k+1}) &= v(\neg(A^k \to \neg A)) = 1 - (v(A^k) \to v(\neg A)) \\ &= 1 - (v(A^k) \to (1 - v(A))) \\ &= 1 - [(1 - v(A^k) + (1 - v(A))) \wedge 1] \\ &= 1 - [(1 - (1 - k(1 - v(A)) \wedge 1) + (1 - v(A))) \wedge 1]. \end{aligned} \tag{9.2.45}$$

若 $k(1 - v(A)) \leqslant 1$，则由式(9.2.45) 得

$$\begin{aligned} v(A^{k+1}) &= 1 - [(k(1 - v(A)) + (1 - v(A)) \wedge 1] \\ &= 1 - [(k+1)(1 - v(A))] \wedge 1. \end{aligned}$$

若 $k(1 - v(A)) > 1$，则由式(9.2.45) 得

$$v(A^{k+1}) = 1 - [(1 - 0 + 1 - v(A)) \wedge 1] = 0.$$

又，这时也有

$$1-[(k+1)(1-v(A)]\wedge 1=0.$$

所以式(9.2.44)中将 k 换为 $k+1$ 时仍成立.这就证明了式(9.2.44).

现在可以计算 $\tau_{L_n}(p^k)$ 如下:由式(9.2.44)知

$$\overline{p^k}(x)=1-[k(1-x)]\wedge 1,\quad x\in L_n. \tag{9.2.46}$$

对于任一指定的函数值 $\overline{p^k}(x)=\dfrac{i}{n-1}$,如果上式在 Ł$_n$ 中有解,则只能有一个解.所以 $\overline{p^k}^{-1}\left(\dfrac{i}{n-1}\right)$ 等于1或0.由式(9.2.3)知为计算 $\tau_{L_n}(p^k)$,只需计算有哪些 i 使 $\overline{p^k}(x)=\dfrac{i}{n-1}$ 在 L_n 中有解.比如,设 $i=n-1$,则 $x=0$ 就是所求的解.因为 $i=0$ 是我们所不关心的,所以除此而外,只需考虑 $k(1-x)<1$ 的情形.为了能得出 L_n 中所列出的那种解.应当令 $\overline{p^k}(x)=1-k\cdot\dfrac{l}{n-1}$,从而由式(9.2.46)得 $k\cdot\dfrac{l}{n-1}=k(1-x)$,即 $x=1-\dfrac{l}{n-1}$.注意使 $\overline{p^k}(x)\in L_n$ 可令 $l=0,1,\cdots,\left[\dfrac{n-1}{k}\right]$.所以由式(9.2.3)得

$$\tau_{L_n}(p^k)=\frac{1}{n}\sum\left\{1-\frac{kl}{n-1}\,\middle|\, l=0,1,\cdots,\left[\frac{n-1}{k}\right]\right\}. \tag{9.2.47}$$

比如,$\tau_{L_3}(p)=\dfrac{1}{3}\left(1+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$,$\tau_{L_4}(p^2)=\dfrac{1}{4}\left(1+\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{3}$,$\tau_{L_4}(p^{10})=\dfrac{1}{4}$ 等.注意,由式(9.2.47)知,当 k 充分大时($k\geqslant n$ 就行),$\tau_{L_n}(p^k)=\dfrac{1}{n}$.

最后来计算 $\Gamma=\{p\}$ 的发散度.设 $p\vdash A$,则由 Łukasiewicz 系统中的弱演绎定理知有自然数 t 使 $\vdash p^t\to A$(参看文献[26]).取 k 充分大使 $k\geqslant\max\{t,n\}$,则 $p^k\to p^t$ 为 Ł$_n$ 中的定理,从而 $\vdash p^k\to A$ 成立.并且 $\tau_{L_n}(p^k)=\dfrac{1}{n}$,所以由命题 9.2.6 的(iii)知 $\tau_{L_n}(A)\geqslant\dfrac{1}{n}$.这就证明了在 $D(\{p\})$ 中各公式真度的最小值等于 $\dfrac{1}{n}$.现在任取 $A,B\in D(\{p\})$,则易证

$$\rho(A,B)\leqslant\rho(A\vee B,p^n)\leqslant\rho(T,p^n)=1-\frac{1}{n}. \tag{9.2.48}$$

这里 T 表示 $D(\{p\})$ 中的定理(请读者完成上面不等式的证明),所以

$$\mathrm{div}_{L_n}(\{p\})=1-\frac{1}{n}. \tag{9.2.49}$$

(iii) 由 $A\otimes B\to A\wedge B$ 为定理可利用归纳法证明

$$\vdash p\otimes\cdots\otimes p_m\to p_1\wedge\cdots\wedge p_m,\quad m=1,2,\cdots \tag{9.2.50}$$

又由式(9.2.40)知 $\lim\limits_{m\to\infty}\rho(p_1\wedge\cdots\wedge p_m,\overline{0})=0$,所以由式(9.2.50)可证明

$$\lim_{m\to\infty}\rho(p_1\otimes\cdots\otimes p_m,\overline{0})=0. \tag{9.2.51}$$

但 $p_1 \otimes \cdots \otimes p_m \in D(S)$，所以 $\mathrm{div}_{L_n}(S) = 1$. 即，$S$ 在系统 Ł_n 中也是全发散的.

下面讨论系统 Ł_n 中理论 Γ 的相容度问题，仍采用定义 9.1.5 来引入理论 Γ 的极指标 $i(\Gamma)$ 并采用定义 9.1.6 定义 Γ 的 η- 相容度，并且可以像那里一样在系统 Ł_n 中证明下面的结论：

命题 9.2.9 在系统 Ł_n 中，设 Γ 是 $F(S)$ 中的理论，用 $\eta_{L_n}(\Gamma)$ 表示 Γ 的 η- 相容度，则

(i) Γ 是完全相容的，即，Γ 全由定理组成，当且仅当 $\eta_{L_n}(\Gamma) = 1$.

(ii) Γ 是相容的当且仅当 $\frac{1}{2} \leqslant \eta_{L_n}(\Gamma) \leqslant 1$. Γ 相容且全发散当且仅当 $\eta_{L_n}(\Gamma) = \frac{1}{2}$.

(iii) Γ 是不相容的当且仅当 $\eta_{L_n}(\Gamma) = 0$.

例 9.2.6 在系统 Ł_n 中，求理论 Γ 的 η- 相容度，这里：

(i) $\Gamma = \{p\}$.

(ii) $\Gamma = S$.

解 (i) 由例 9.2.5(ii) 知 $\mathrm{div}_{L_n}(\{p\}) = 1 - \frac{1}{n}$，所以由式(9.1.22) 得

$$\eta_{L_n}(\{p\}) = 1 - \frac{1}{2}\mathrm{div}_{L_n}(\{p\})(1 + i(\Gamma)) = 1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{n+1}{2n}.$$

(ii) 因为 $\mathrm{div}_{L_n}(S) = 1$ 且 S 是相容的，从而 $i(\Gamma) = 0$，所以 $\eta_{L_n}(S) = \frac{1}{2}$.

注 9.2.2 因为在系统 Ł_n 中演绎定理不成立，而在弱演绎定理中又含有不确定参数，即，由 $\{A_1, \cdots, A_m\} \vdash B$ 只能得出

$$\vdash A_1^{k_1} \otimes \cdots \otimes A_m^{k_m} \to B, \tag{9.2.52}$$

这里 $k_1, \cdots, k_m$ 是未知的自然数，所以定义 9.1.7 中的 δ- 相容度概念不易推广到系统 Ł_n 中.

9.2.5 系统 Ł_n 中的近似推理理论

在 9.1.6 小节中我们曾在经典的二值命题逻辑系统 **L** 中给出了三种不同的带有误差的推理机制，其中除了带有 II- 型误差的结论需要另行定义而外，其余两个概念均可推广到系统 Ł_n 中来.

定义 9.2.6 在系统 Ł_n 中，设 $\Gamma \subset F(S)$，$B \in F(S)$，$\varepsilon > 0$. 若

$$\rho(B, D(\Gamma)) < \varepsilon, \tag{9.2.53}$$

则称 B 为 Γ 的 **I- 型误差小于 ε 的结论**，简记为 $B \in D^1_{L_n,\varepsilon}(\Gamma)$.

显然，若 $B \in D(\Gamma)$，则对任意的 $\varepsilon > 0$ 均有 $B \in D^1_{L_n,\varepsilon}(\Gamma)$. 但反之不真. 又，$B \in D^1_{L_n,\varepsilon}(\Gamma)$ 的充要条件是存在 Γ- 结论 A 使 $\rho(A, B) < \varepsilon$.

例 9.2.7 在系统 Ł_3 中，设 $\Gamma = \{p \vee q, p \vee r\}$，$B = p$. 这时可像例 9.1.6 一样得出 $\rho(p, p \vee (q \wedge r)) = 1 - \tau_{L_3}(q \wedge r \to p)$. 但在系统 Ł_3 中 $q \wedge r \to p$ 已不

再与 $\neg q \vee \neg r \vee p$ 可证等价,但不难算出 $\tau_{L_3}(q \wedge r \to p) = \frac{8}{9}$,所以 $\rho(p, p \vee (q \wedge r)) = \frac{1}{9} = 0.111\cdots$. 又,$p \vee (q \wedge r) \in D(\Gamma)$,所以 B 是 Γ 的 I- 型误差小于 0.12 的结论. 其实,误差 0.12 还可缩小,因为 $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ 未必是 $D(\Gamma)$ 中离 p 最近的公式. 比如,$(p \vee q) \otimes (p \vee r)$ 也属于 $D(\Gamma)$,是否 $\rho((p \vee q) \otimes (p \vee r), p)$ 会更小一些?请读者考虑并作出回答.

注意,定义 9.1.9 中的式(9.1.28) 对系统 $\text{Ł}_n (n > 2)$ 已不再适用. 事实上,设 $\Gamma \vdash B$,则 Γ 中未必有公式 $A_1, \cdots, A_m$ 使得 $A_1 \wedge \cdots \wedge A_m \to B$ 为定理,只能推出含有多个未知参数 $k_1, \cdots, k_m$ 的式(9.2.52) 成立,所以自然不能用式(9.1.28) 来描述带有误差的 Γ- 结论. 但当 $\Gamma \vdash B$ 成立时 $D(\Gamma)$ 中确有公式 $A = A_1^{k_1} \otimes \cdots \otimes A_m^{k_m}$ 使 $\vdash A \to B$ 成立. 这时 $\tau_{L_n}(A \to B) = 1$. 所以可采用式(9.1.29) 在系统 Ł_n 中给出 II- 型带误差的 Γ- 结论的概念.

定义 9.2.7 在系统 Ł_n 中,设 $\Gamma \subset F(S), B \in F(S), \varepsilon > 0$. 若

$$1 - \sup\{\tau_{L_n}(A \to B) \mid A \in D(\Gamma)\} < \varepsilon, \tag{9.2.54}$$

则称 B 为 Γ 的 II- **型误差小于** ε **的结论**,简记为 $B \in D^2_{L_n, \varepsilon}(\Gamma)$.

可以像证明命题 9.1.16 一样证明下面的

命题 9.2.10 设 $\Gamma \subset F(S), B \in F(S), \varepsilon > 0$.

$$\text{若 } B \in D^1_{L_n, \varepsilon}(\Gamma), \text{则 } B \in D^2_{L_n, \varepsilon}(\Gamma). \tag{9.2.55}$$

定义 9.2.8 在系统 Ł_n 中,设 $\Gamma \subset F(S), B \in F(S), \varepsilon > 0$. 设

$$\inf\{H(D(\Gamma), D(\Sigma)) \mid \Sigma \subset F(S), \Sigma \vdash B\} < \varepsilon, \tag{9.2.56}$$

则称 B 是 Γ 的 III- **型误差小于** ε **的结论**,简记为 $B \in D^3_{L_n, \varepsilon}(\Gamma)$.

容易证明下面的

命题 9.2.11 设 $\Gamma \subset F(S), B \in F(S), \varepsilon > 0$.

$$\text{若 } B \in D^3_{L_n, \varepsilon}(\Gamma), \text{则 } B \in D^1_{L_n, \varepsilon}(\Gamma). \tag{9.2.57}$$

9.2.6 系统 Łuk 中的数值化逻辑理论

前面关于系统 Ł_n 的数值化的讨论对任意自然数 $n \geqslant 2$ 都成立,一个自然的问题是:当 n 充分大时,系统 Ł_n 与 Łuk 有何关系?因为当 n 很大时系统 Ł_n 的赋值域 $L_n = \left\{0, \frac{1}{n-1}, \cdots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}$ 在[0,1]中的分布已经相当“稠密”(不是指拓扑意义下的稠密,只是一种直观形象上的描述),所以可将 L_n 看作是[0,1]的一种近似,n 越大,L_n 与[0,1]越相近. 下面的定理建立了离散的系统 Ł_n 与连续的系统 Łuk 之间的关系,已得到证明①.

---

① 王国俊,李璧镜. Łukasiewicz n 值命题逻辑系统中公式的真度理论和极限定理. 中国科学,E 辑, 2005(35),6,561 ~ 569.

定义 9.2.9 设公式 $A(p_1,\cdots,p_m)$ 含有 m 个原子公式 $p_1,\cdots,p_m$. 令

$$\tau_{L_\infty}(A)=\underbrace{\int_0^1\cdots\int_0^1}_{m\text{个}}\overline{A}_\infty(x_1,\cdots,x_m)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_m, \tag{9.2.58}$$

称 $\tau_{L_\infty}(A)$ 为 A 的**积分真度**(参看文献[19]),或简记为 $\tau_\infty(A)$,这里 $\overline{A}_\infty:[0,1]^m\to[0,1]$ 是 A 所诱导的函数.

命题 9.2.12(极限定理) 设 $A(p_1,\cdots,p_m)\in F(S)$,则

$$\lim_{n\to\infty}\tau_{L_n}(A)=\tau_{L_\infty}(A). \tag{9.2.59}$$

证明 比较式(9.2.21)与式(9.2.58)知以下只需证明当 $n\to\infty$ 时 $\overline{\overline{A}}_n$ 在$[0,1]^m$ 上一致收敛于 $\overline{A}_\infty$.

事实上,因为公式 $A(p_1,\cdots,p_m)$ 在 L_n 上所诱导的函数 $\overline{A}:L_n^m\to L_n$ 与它在$[0,1]$上所诱导的函数 $\overline{A}_\infty:[0,1]^m\to[0,1]$ 的结构完全相同,只不过 $\overline{A}$ 的定义域 L_n^m 是 $\overline{A}_\infty$ 的定义域$[0,1]^m$ 的一部分而已,所以

$$\overline{A}\left(\frac{n}{n-1}\alpha_1,\cdots,\frac{n}{n-1}\alpha_m\right)=\overline{A}_\infty\left(\frac{n}{n-1}\alpha_1,\cdots,\frac{n}{n-1}\alpha_m\right), \tag{9.2.60}$$

这里 $\alpha_j\in\left\{0,\frac{1}{n},\cdots,\frac{n-1}{n},1\right\}(j=1,\cdots,m)$, $\left(\frac{n}{n-1}\alpha_1,\cdots,\frac{n}{n-1}\alpha_m\right)\in L_n^m$. 以下称 L_n^m 中形如 $\left(\frac{n}{n-1}\alpha_1,\cdots,\frac{n}{n-1}\alpha_m\right)$ 的点为$[0,1]^m$ 中的格点. 因为 $\overline{A}_\infty$ 是连续函数,所以在紧集$[0,1]^m$上一致连续,从而对任意给定的正数 ε,取 n 充分大即可使 $\overline{A}_\infty$ 在每个 cube$(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$ 中的振幅都小于 ε. 又,由定义 9.2.2 知阶梯函数 $\overline{\overline{A}}_n$ 在每个 cube$(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$ 上都取常值 $\overline{A}\left(\frac{n}{n-1}\alpha_1,\cdots,\frac{n}{n-1}\alpha_m\right)$. 所以由式(9.2.60)知 $|\overline{A}_\infty-\overline{\overline{A}}_n|$ 在每个 cube,从而在$[0,1]^m$ 上处处小于 ε. 由 ε 的任意性知当 $n\to\infty$ 时 $\overline{\overline{A}}_n$ 在$[0,1]^m$ 上一致收敛于 $\overline{A}_\infty$. 这就证明了极限定理.

有了极限定理,系统 **Ł**$_n$ 中的性质可以容易地转化成系统 **Łuk** 中的性质.

命题 9.2.13 在系统 **Łuk** 中,设 $A,B,C\in F(S)$, $\alpha,\beta\in[0,1]$.

(i) 若 $A\approx B(A\sim B)$,则 $\tau_\infty(A)=\tau_\infty(B)$.

(ii) $\tau_\infty(A\vee B)+\tau_\infty(A\wedge B)=\tau_\infty(A)+\tau_\infty(B)$.

(iii) $\tau_\infty(\neg A)=1-\tau_\infty(A)$.

(iv) 若 $\tau_\infty(A)\geqslant\alpha$, $\tau_\infty(A\to B)\geqslant\beta$,则 $\tau_\infty(B)\geqslant\alpha+\beta-1$.

(v) 若 $\tau_\infty(A\to B)\geqslant\alpha$, $\tau_\infty(B\to C)\geqslant\beta$,则 $\tau_\infty(A\to C)\geqslant\alpha+\beta-1$.

(vi) 若 $\vdash A\to B$,则 $\tau_\infty(A)\leqslant\tau_\infty(B)$.

证明 由系统 **Ł**$_n$ 中的相应性质对 n 取极限即得以上各性质.

定义 9.2.10 在系统 **Łuk** 中,设 $A,B\in F(S)$,令

$$\xi_\infty(A,B)=\tau_\infty((A\to B)\wedge(B\to A)),$$

称 $\xi_\infty(A,B)$ 为公式 A 与 B 之间的相似度.

由极限定理得

$\lim\limits_{n\to\infty}\xi_{L_n}(A,B)=\lim\limits_{n\to\infty}\tau_{L_n}((A\to B)\wedge(B\to A))=\tau_\infty((A\to B)\wedge(B\to A))=\xi_\infty(A,B).$ (9.2.61)

所以可得出以下命题:

命题 9.2.14　在系统 **Łuk** 中,设 $A,B,C\in F(S)$,则

$$\xi_\infty(A,B)+\xi_\infty(B,C)\leqslant\xi_\infty(A,C)+1. \tag{9.2.62}$$

又,容易根据公式 $A(p_1,\cdots,p_m)$ 诱导的函数 $\overline{A}_\infty(x_1,\cdots,x_m)$ 在 $[0,1]^m$ 上的连续性证明

$$\xi_\infty(A,B)=1 \text{ 当且仅当 } A\approx B. \tag{9.2.63}$$

$\xi_\infty(A,B)=0$ 当且仅当 A 与 B 之一为重言式,另一为矛盾式.　(9.2.64)

再令

$$\rho_\infty(A,B)=1-\xi_\infty(A,B),A,B\in F(S). \tag{9.2.65}$$

则由命题 9.2.14 知 ρ_∞ 是 $F(S)$ 上的伪距离. 并且有

$$\rho_\infty(A,B)=\lim_{n\to\infty}\rho_{L_n}(A,B),A,B\in F(S). \tag{9.2.66}$$

请读者自行证明:

(i) $\rho_\infty(A,B)=0$ 当且仅当 $A\approx B$.　(9.2.67)

(ii) $\rho_\infty(A,B)=1$ 当且仅当 A 与 B 之一为重言式且另一为矛盾式. (9.2.68)

(iii) $\rho_\infty(A,\overline{0})=\tau_\infty(A)$.　(9.2.69)

有了以上基本性质,就可以在系统 **Łuk** 中建立理论 Γ 的发散度与相容度以及近似推理理论,请读者补全这些理论并参看文献[19].

习　题　9.2

1. 求以下各公式在系统 $Ł_5$ 中的真度:

(i) $\neg p\to q$.

(ii) $p\wedge\neg p$.

(iii) $p_1\wedge\cdots\wedge p_5$.

2. 在系统 $Ł_n$ 中试证:

$\tau_{L_n}(A\vee B\vee C)=\tau_{L_n}(A)+\tau_{L_n}(B)+\tau_{L_n}(C)-\tau_{L_n}(A\wedge B)-\tau_{L_n}(A\wedge C)-\tau_{L_n}(B\wedge C)+\tau_{L_n}(A\wedge B\wedge C)$.

3. 设 $\otimes_L$ 是与 Łukasiewicz 蕴涵相伴随的三角模. 试用 $\otimes_L$ 表述命题 9.2.6 中的结果,并与命题 9.3.4 中的相应结果作比较后进行统一表述.

4. 在系统 $Ł_7$ 中求公式 A 与 B 之间的相似度与伪距离,设

(i) $A=p,B=q$.

(ii) $A=p,B=\neg p$.

(iii) $A = p \vee q, B = p \wedge q$.

5. 在系统 $Ł_n$ 中，求 $\Gamma = \{p \wedge q\}$ 的发散度.

6. 试证在系统 $Ł_n$ 中，蕴涵运算 $\rightarrow: (F(S), \rho)^2 \rightarrow (F(S), \rho)$ 是连续映射.

7. 在系统 $Ł_6$ 中，求以下理论的 η - 相容度：

(i) $\Gamma = \{p, q\}$.

(ii) $\Gamma = \{p_1, p_3, \cdots, p_{2k+1}, \cdots\}$.

8. 在系统 $Ł_4$ 中，设 $\Gamma = \{p \vee q\}, B = p$. B 是 Γ 的误差小于多少的 I- 型、II- 型和 III- 型结论？

9. 能否在系统 $Ł_n$ 中建立一个不含未知参数的广义演绎定理？为什么？

9.3 多值 R_0 - 命题逻辑系统 $\mathscr{L}_n^*$ 与 $\mathscr{L}^*$ 中的计量逻辑理论

在 8.6 节中我们较系统地研究了形式系统 $\mathscr{L}^*$，其相应的赋值格是 8.5 节中研究的 R_0 - 代数的特例——R_0 - 单位区间. 其实，赋值格也可取为$[0,1]$的有限子集，只要它关于 $\neg, \rightarrow, \vee, \wedge$ 等运算封闭就行，这里

$$a \rightarrow b = R_0(a,b) = \begin{cases} 1, & a \leqslant b, \\ a' \vee b, & a > b, \end{cases} \quad a' = 1 - a, \quad a, b \in [0,1], \tag{9.3.1}$$

并且为简便计，将非运算 $\neg$ 记成了"$'$". 比如对于 4 值情形，既可取赋值格为 $\left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$，也可取赋值格为 $\left\{0, \frac{1}{7}, \frac{6}{7}, 1\right\}$，因为它们都关于 $\neg, \rightarrow, \vee, \wedge$ 各运算封闭. 为方便起见，以下取 0,1 以及$[0,1]$的等分点组成 n 值 R_0 - 代数，并将其记为 R_n，即

$$R_n = \left\{0, \frac{1}{n-1}, \cdots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}. \tag{9.3.2}$$

注意，作为集合看待时 R_n 与 L_n 一致，但作为代数看待时 R_n 与 L_n 不同($n > 3$)，比如，在 L_4 中 $\frac{2}{3} \rightarrow \frac{1}{3} = 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$，但在 R_4 中 $\frac{2}{3} \rightarrow \frac{1}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)' \vee \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

以下把采用 $\mathscr{L}^*$ 中的公理与推理规则且取赋值格为 R_n 的命题逻辑系统称为 n 值 R_0 - 命题逻辑系统，并记为 $\mathscr{L}_n^*$. 这个系统增加适当的公理后是完备的，并已得到证明①.

9.3.1 系统 $\mathscr{L}_n^*$ 中公式的真度理论

在系统 $\mathscr{L}_n^*$ 中，全体逻辑公式之集仍记为 $F(S)$，即，$F(S)$ 是由 $S = \{p_1, p_2, \cdots\}$ 生成的$(\neg, \vee, \rightarrow)$型自由代数. 约定

---

① 裴道武，王三民. 形式系统 $\mathscr{L}_n^*$ 的完备性. 高校应用数学学报，A 辑，2001，16(3)：253 ～ 262.

$A \otimes B = \neg(A \to \neg B), A \oplus B = \neg A \to B, A^2 = A \otimes A, A^{m+1} = A^m \otimes A,$
$A, B \in F(S).$ (9.3.3)
注意系统 **Ł**$_n$ 中的关系式 $A \vee B = (A \to B) \to B$ 在系统 $\mathscr{L}_n^*$ 中已不再成立.

映射 $v: F(S) \to R_n$ 叫 $F(S)$ 的赋值,若 v 是$(\neg, \vee, \to)$型同态,即

$v(\neg A) = \neg v(A), v(A \vee B) = v(A) \vee v(B), v(A \to B) = v(A) \to v(B),$
$A, B \in F(S).$
这里在 R_n 中 $a \vee b = \max\{a, b\}(a, b \in R_n)$. $F(S)$ 的赋值的全体之集记为 $\Omega(R_n)$,在不致混淆时也简记为 Ω.

设 $A(p_1, \cdots, p_m) \in F(S)$, $p_1, \cdots, p_m$ 是 A 中的全部原子公式,则 A 诱导一个映射 $\overline{A}: R_n^m \to R_n$, $\overline{A}(x_1, \cdots, x_m)$ 由 $x_1, \cdots, x_m$ 通过 $\neg$, $\to$ 和 $\vee$ 连接而成,其方式恰如 A 由 $p_1, \cdots, p_m$ 通过逻辑连接词 $\neg$, $\to$ 和 $\vee$ 连接而成的方式. 设 $v \in \Omega$,由 v 为同态知

$$v(A(p_1, \cdots, p_m)) = \overline{A}(v(p_1), \cdots, v(p_m)). \tag{9.3.4}$$

由此易证下面的

命题 9.3.1　在系统 $\mathscr{L}_n^*$ 中,设 $A(p_1, \cdots, p_m) \in F(S)$.

(i) A 是重言式当且仅当对每个$(x_1, \cdots, x_m) \in R_n^m$ 均有 $\overline{A}(x_1, \cdots, x_m) = 1$.

(ii) A 是矛盾式当且仅当对每个$(x_1, \cdots, x_m) \in R_n^m$ 均有 $\overline{A}(x_1, \cdots, x_m) = 0$.

在系统 $\mathscr{L}_n^*$ 中仍按加权求和的方式定义公式的真度.

定义 9.3.1　设 $A(p_1, \cdots, p_m)$ 是系统 $\mathscr{L}_n^*$ 中含有 m 个原子命题 $p_1, \cdots, p_m$ 的公式,则 A 的真度 $\tau_{R_n}(A)$ 的定义如下:

$$\tau_{R_n}(A) = \frac{1}{n^m} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{n-1} \left| \overline{A}^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right) \right|. \tag{9.3.5}$$

例 9.3.1　在系统 $\mathscr{L}_4^*$ 中,求公式 $p, p \to q$ 和 $p \vee q$ 的真度.

解　(i) $\overline{p}(x) = x, \tau_{R_4}(p) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{3} \frac{i}{3}\left|\overline{p}^{-1}\left(\frac{i}{3}\right)\right| = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{3}\frac{i}{3} = \frac{1}{2}$.

(ii) 由式(9.3.1)知 $|\overline{p \to q}^{-1}(1)| = |\{(x, y) \in R_4^2 \mid x \leqslant y\}| = 10$. 又,$\left|\overline{p \to q}^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right| = 2, \left|\overline{p \to q}^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right| = 3$,所以由式(9.3.5)得

$$\tau_{R_4}(p \to q) = \frac{1}{4^2}\sum_{i=1}^{3}\frac{i}{3}\left|\overline{p \to q}^{-1}\left(\frac{i}{3}\right)\right| = \frac{1}{16}\left(10 + \frac{2}{3} \times 2 + \frac{1}{3} \times 3\right) = \frac{37}{48}.$$

(iii) $|\overline{p \vee q}^{-1}(1)| = 7, \left|\overline{p \vee q}^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right| = 5, \left|\overline{p \vee q}^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right| = 3$,所以由式(9.3.5)得

$$\tau_{R_4}(p \vee q) = \frac{1}{4^2}\sum_{i=1}^{3}\frac{i}{3}\left|\overline{p \to q}^{-1}\left(\frac{i}{3}\right)\right| = \frac{1}{16}\left(7 + \frac{2}{3} \times 5 + \frac{1}{3} \times 3\right) = \frac{17}{24}.$$

可以像在系统 **Ł**$_n$ 中那样在系统 $\mathscr{L}_n^*$ 中证明下面的命题.

命题 9.3.2 在系统 $\mathscr{L}_n^*$ 中,设 $A,B \in F(S)$,则:

(i) $\tau_{R_n}(A \vee B) = \tau_{R_n}(A) + \tau_{R_n}(B) - \tau_{R_n}(A \wedge B)$.

(ii) $\tau_{R_n}(\neg A) = 1 - \tau_{R_n}(A)$.

在系统 $\mathscr{L}_n^*$ 中,仍用 $\overline{A}$ 表示公式 $A(p_1,\cdots,p_m)$ 诱导的函数 $\overline{A}:\mathrm{R}_n^m \to R_n$,用 $\overline{\overline{A}}_n$ 表示 A 所诱导的阶梯函数(参看 9.2.2 小节)$\overline{\overline{A}}_n:[0,1]^m \to [0,1]$. 注意在 9.2.2 小节的积分表示方法中并未涉及 L_n 中的运算,所以那里的讨论对 R_n 仍然适用,因此我们有

命题 9.3.3 在系统 $\mathscr{L}_n^*$ 中,设 $A(p_1,\cdots,p_m)$ 是含有 m 个原子公式 $p_1,\cdots,p_m$ 的公式,则

$$\tau_{R_n}(A) = \int_{[0,1]^m} \overline{\overline{A}}_n(y_1,\cdots,y_m)\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_m, \tag{9.3.6}$$

这里

$$\overline{\overline{A}}_n(y_1,\cdots,y_m) = \frac{i}{n-1} \text{ 当且仅当}(y_1,\cdots,y_m) \in \mathrm{cube}(\alpha_1,\cdots,\alpha_m). \tag{9.3.7}$$

并且

$$\overline{A}\left(\frac{n}{n-1}\alpha_1,\cdots,\frac{n}{n-1}\alpha_m\right) = \frac{i}{n-1}, \quad i = 0,1,\cdots,n-1. \tag{9.3.8}$$

其中

$$\alpha_k \in \left\{0,\frac{1}{n},\cdots,\frac{n-1}{n}\right\}, \quad k = 1,\cdots,m. \tag{9.3.9}$$

以下用 $\otimes_0$ 表示 R_0 型蕴涵的伴随三角模. 利用命题 9.3.3 可以证明

命题 9.3.4 在系统 $\mathscr{L}_n^*$ 中,设 $A,B,C \in F(S)$,$\alpha,\beta \in [0,1]$,则:

(i) 若 $\tau_{R_n}(A) \geqslant \alpha$,$\tau_{R_n}(A \to B) \geqslant \beta$,则 $\tau_{R_n}(B) \geqslant \alpha + \beta - 1$.

(ii) 若 $\tau_{R_n}(A \to B) \geqslant \alpha$,$\tau_{R_n}(B \to C) \geqslant \beta$,则 $\tau_{R_n}(A \to C) \geqslant \alpha + \beta - 1$.

(iii) 若 $\vdash A \to B$,则 $\tau_{R_n}(B) \geqslant \tau_{R_n}(A)$.

证明 (i) 先证

$$b \geqslant a + (a \to b) - 1, \quad a,b \in R_n. \tag{9.3.10}$$

若 $a \leqslant b$,则 $a + (a \to b) - 1 = a + 1 - 1 = a \leqslant b$,即式(9.3.10) 成立. 下设 $a > b$,则 $a + (a \to b) = a + (1 - a) \vee b = (a + 1 - a) \vee (a + b) = 1 \vee (a + b) \leqslant 1 + b$,所以式(9.3.10) 仍成立.

不妨设 A 与 B 均含有 m 个原子公式 $p_1,\cdots,p_m$. 则由式(9.3.10) 知

$$\overline{\overline{B}}_n \geqslant \overline{\overline{A}}_n + (\overline{\overline{A}}_n \to \overline{\overline{B}}_n) - 1. \tag{9.3.11}$$

类似于式(9.2.25),在 R_n 中有

$$(\overline{\overline{A \to B}})_n = \overline{\overline{A}}_n \to \overline{\overline{B}}_n. \tag{9.3.12}$$

所以由命题 9.3.3 知

$$\tau_{R_n}(B) = \int_{\Delta} \overline{\overline{B}}_n(y_1,\cdots,y_n)\mathrm{d}w$$

$$\geqslant \int_{\Delta} [\overline{A}_n(y_1,\cdots,y_n) + (\overline{A}_n \to \overline{B}_n)(y_1,\cdots,y_m) - 1]\mathrm{d}w$$
$$= \int_{\Delta} \overline{A}_n(y_1,\cdots,y_m)\mathrm{d}w + \int_{\Delta} (\overline{A}_n \to \overline{B}_n)(y_1,\cdots,y_m)\mathrm{d}w - 1$$
$$= \tau_{R_n}(A) + \int_{\Delta} [(\overline{A}_n \to \overline{B}_n)(y_1,\cdots,y_m)\mathrm{d}w - 1$$
$$= \tau_{R_n}(A) + \tau_{R_n}(A \to B) - 1$$
$$\geqslant \alpha + \beta - 1. \tag{9.3.13}$$

即证得(i)成立. 这里分别把$[0,1]^m$和$\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_m$简记为$\Delta$和$\mathrm{d}w$.

(ii) 在系统$\mathscr{L}_n^*$中$(B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$为定理,从而

$$\tau_{R_n}((B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))) \geqslant 1.$$

又,$\tau_{R_n}(B \to C) \geqslant \beta$,所以由(i)得$\tau_{R_n}((A \to B) \to (A \to C)) \geqslant 1 + \beta - 1 = \beta$. 再由$\tau_{R_n}(A \to B) \geqslant \alpha$和(i)即得$\tau_{R_n}(A \to C) \geqslant \alpha + \beta - 1$.

(iii) 因为$\tau_{R_n}(A \to B) \geqslant 1$,所以$\tau_{R_n}(B) \geqslant \tau_{R_n}(A) + 1 - 1 = \tau_{R_n}(A)$.

9.3.2　系统$\mathscr{L}_n^*$中公式间的相似度与伪距离

定义 9.3.2　在系统$\mathscr{L}_n^*$中,设$A,B \in F(S)$,令

$$\xi_{R_n}(A,B) = \tau_{R_n}((A \to B) \wedge (B \to A)),$$

称$\xi_{R_n}(A,B)$为公式A与B之间的**相似度**.

例 9.3.2　在系统$\mathscr{L}_4^*$中,计算公式A与B之间的相似度,设:

(i) $A = p, B = q$.

(ii) $A = p, B = \neg p$.

(iii) $A = p, B = \neg p \to q$.

这里p与q是不同的原子公式.

解　(i) $\xi_{R_4}(A,B) = \tau_{R_4}((p \to q) \wedge (q \to p))$. 这时

$$\left|\overline{(p \to q) \wedge (q \to p)}^{-1}(1)\right| = 4,$$
$$\left|\overline{(p \to q) \wedge (q \to p)}^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right| = 4,$$
$$\left|\overline{(p \to q) \wedge (q \to p)}^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right| = 6,$$

所以由式(9.3.5)得

$$\xi_{R_4}(p,q) = \frac{1}{4^2}\left(4 + \frac{2}{3} \times 4 + \frac{1}{3} \times 6\right) = \frac{13}{24}.$$

(ii) 因为

$$\left|\overline{(p \to \neg p) \wedge (\neg p \to p)}^{-1}(1)\right| = 0,$$
$$\left|\overline{(p \to \neg p) \wedge (\neg p \to p)}^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right| = 0,$$
$$\left|\overline{(p \to \neg p) \wedge (\neg p \to p)}^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right| = 2,$$

所以 $\xi_{R_4}(p,\neg p)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times 2=\frac{1}{6}$.

(iii) 因为

$$\left|\overline{(p\to(\neg p\to q))\wedge((\neg p\to q)\to p)}^{-1}(1)\right|=8,$$

$$\left|\overline{(p\to(\neg p\to q))\wedge((\neg p\to q)\to p)}^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right|=4,$$

$$\left|\overline{(p\to(\neg p\to q))\wedge((\neg p\to q)\to p)}^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right|=3,$$

所以 $\xi_{R_4}(p,\neg p\to q)=\frac{1}{16}\left(8+\frac{2}{3}\times 4+\frac{1}{3}\times 3\right)=\frac{35}{48}$.

命题 9.2.7 在 $\mathscr{L}_n^*$ 中也成立，即，我们有

命题 9.3.5 在系统 $\mathscr{L}_n^*$ 中，设 $A,B,C\in F(S)$，则：

(i) $\xi_{R_n}(A,B)=1$ 当且仅当 $A\approx B$.

(ii) $\xi_{R_n}(A,B)=0$ 当且仅当 A 与 B 之一为重言式且另一为矛盾式.

(iii) $\xi_{R_n}(A,B)+\xi_{R_n}(B,C)\leqslant\xi_{R_n}(A,C)+1$.

定义 9.3.3 在系统 $\mathscr{L}_n^*$ 中定义函数 $\rho_{R_n}:F(S)\times F(S)\to[0,1]$ 如下：

$$\rho_{R_n}(A,B)=1-\xi_{R_n}(A,B),\qquad A,B\in F(S),\tag{9.3.14}$$

则 ρ_{R_n} 是 $F(S)$ 上伪距离. 称 ρ_{R_n} 为系统 $\mathscr{L}_n^*$ 中 $F(S)$ 上的**自然伪距离**，简称**伪距离**. 又，在不致混淆时也可将 ρ_{R_n} 简写为 ρ.

容易直接验证下面的

命题 9.3.6 在系统 $\mathscr{L}_n^*$ 中，设 $A,B\in F(S)$，用 $\bar{0}$ 表示矛盾式，则

(i) $\rho(A,B)=0$ 当且仅当 $A\approx B$.

(ii) $\rho(A,B)=1$ 当且仅当 A 与 B 之一为重言式另一为矛盾式.

(iii) $\rho(\neg A,\neg B)=\rho(A,B)$.

(iv) $\rho(A,\bar{0})=\tau_{R_n}(A)$.

例 9.3.3 在系统 $\mathscr{L}_n^*$ 中计算 $\rho(p^2,\bar{0})$.

解 由上面命题的(iv)知只需计算 $\tau_{R_n}(p^2)$. 这时 $\overline{p^2}(x)=\neg(x\to\neg x)$. 因为当 $x\leqslant\frac{1}{2}$ 时 $\neg(x\to\neg x)=0$，所以只需考虑 $x>\frac{1}{2}$ 的情形. 这时 $\overline{p^2}(x)=x$，所以由式(9.3.5)得

$$\tau_{R_n}(p^2)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{n-1}\left|\overline{p^2}^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)\right|=\frac{1}{n}\sum_{i=[\frac{n-1}{2}+1]}^{n-1}\frac{i}{n-1}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{3n-1}{8n}, & n\text{ 为奇数},\\[2mm] \dfrac{3n-2}{8(n-1)}, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$$

这也就是 $\rho(p^2,\bar{0})$ 的表达式.

在 9.2.3 小节末尾,我们曾说明在系统 $Ł_n$ 中,运算 $\neg$, $\rightarrow$, $\otimes$, $\wedge$, $\vee$ 等关于 ρ 都是连续的,以 $\rightarrow$ 为例,这里说的是运算 $\rightarrow: F(S)\times F(S)\rightarrow F(S)$ 是连续的. 因为 Łukasiewicz 蕴涵算子 $\rightarrow:[0,1]\times[0,1]\rightarrow[0,1]$ 是连续的,所以 $\rightarrow$ 是 $F(S)$ 上关于 ρ 连续似乎是在预料之中的. 另一方面,我们知道,由式(9.3.1) 所描述的 R_0-型蕴涵 $\rightarrow:[0,1]\times[0,1]\rightarrow[0,1]$ 不是连续的,比如,$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\rightarrow\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)\right)\neq\frac{1}{2}\rightarrow\frac{1}{2}=1$,即 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 是二元运算 $\rightarrow$ 的间断点. 事实上,正方形 $[0,1]^2$ 的对角线 $x=y$ 上的点除了 $(1,1)$ 以外都是二元运算的间断点. 但似乎有一点出人意料的是,在系统 $\mathscr{L}_n^*$ 中,蕴涵算子 $\rightarrow: F(S)\times F(S)\rightarrow F(S)$ 关于 ρ_{R_n} 却是处处连续的. 我们有

命题 9.3.7 在系统 $\mathscr{L}_n^*$ 中 $F(S)$ 上的运算 $\neg$, $\rightarrow$, $\otimes$, $\wedge$, $\oplus$, $\vee$ 等关于 ρ_{R_n} 都是连续的.

证明 由式(9.3.3) 知只需证明运算 $\neg$, $\rightarrow$ 和 $\vee$ 的连续性. 由命题 9.3.6(iii),$\neg: F(S)\rightarrow F(S)$ 显然连续. 以下先证明 $\vee: F(S)^2\rightarrow F(S)$ 的连续性,再证明 $\rightarrow: F(S)^2\rightarrow F(S)$ 的连续性.

设 $A,B,B_m\in F(S)(m=1,2,\cdots)$,且对任意给定的 $\varepsilon>0$,有自然数 M 使当 $m>M$ 时有 $\rho(B,B_m)<\varepsilon$,即

$$\xi_{R_n}(B,B_m)=\tau_{R_n}((B\rightarrow B_m)\wedge(B_m\rightarrow B))>1-\varepsilon,\quad m>M. \tag{9.3.15}$$

易证 $\vdash(B\rightarrow B_m)\rightarrow(A\vee B\rightarrow A\vee B_m)$, $\vdash(B_m\rightarrow B)\rightarrow(A\vee B_m\rightarrow A\vee B)$,所以

$$\vdash(B\rightarrow B_m)\wedge(B_m\rightarrow B)\rightarrow(A\vee B\rightarrow A\vee B_m)\wedge(A\vee B_m\rightarrow A\vee B).$$

从而由命题 9.3.4(iii) 得

$$\xi_{R_n}(A\vee B,A\vee B_m)=\tau_{R_n}((A\vee B)\rightarrow A\vee B_m)\wedge(A\vee B_m\rightarrow A\vee B))\geqslant \tau_{R_n}((B\rightarrow B_m)\wedge(B_m\rightarrow B))=\xi_{R_n}(B,B_m)>1-\varepsilon.$$

所以由式(9.3.15) 得

$$\rho(A\vee B,A\vee B_m)<\varepsilon,\quad m>M.$$

这就证明了 $\lim\limits_{m\to\infty}\rho(A\vee B,A\vee B_m)=0$,从而 $\lim\limits_{m\to\infty}A\vee B_m=A\vee B$. 由于以上证明与 A 无关,所以可以进而证明当 $\lim\limits_{m\to\infty}A_m=A$ 且 $\lim\limits_{m\to\infty}B_m=B$ 时 $\lim\limits_{m\to\infty}A_m\vee B_m=A\vee B$.

关于 $\rightarrow$ 的连续性可采用类似于上面的办法证明. 事实上,因为

$$\vdash(B\rightarrow B_m)\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow B_m)),$$
$$\vdash(B_m\rightarrow B)\rightarrow((A\rightarrow B_m)\rightarrow(A\rightarrow B)),$$

所以有

$$\vdash(B\rightarrow B_m)\wedge(B_m\rightarrow B)\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow B_m))\wedge((A\rightarrow B_m)\rightarrow(A\rightarrow B)).$$

由此可证 $\xi_{R_n}(B,B_m)\leqslant\xi_{R_n}(A\to B,A\to B_m)$ 以及 $\lim\limits_{m\to\infty}A\to B_m=A\to B$. 最终可证明 $\lim\limits_{m\to\infty}A_m\to B_m=A\to B$.

9.3.3　系统 $\mathscr{L}_n^*$ 中理论 Γ 的发散度与相容度

可以像对系统 Ł_n 那样在系统 $\mathscr{L}_n^*$ 中引入和讨论理论 Γ 的发散度与相容度，但由于 R_0- 型涵算子与 Łukasiewicz 蕴涵算子不同，所以两个系统中计算方法与结果不尽相同. 特别值得提出的是，在系统 $\mathscr{L}_n^*$ 中，广义演绎定理(命题 8.6.13) 成立，即设 $\Gamma\subset F(S)$，$A,B\in F(S)$，则

$$\Gamma\cup\{A\}\vdash B\ \text{当且仅当}\ \Gamma\vdash A^2\to B. \tag{9.3.16}$$

由此可在系统 $\mathscr{L}_n^*$ 中较方便地讨论有限理论 Γ 的 δ- 相容度以及简化某些理论的发散度的计算.

定义 9.3.4　在系统 $\mathscr{L}_n^*$ 中，设 $\Gamma\subset F(S)$，令

$$\operatorname{div}_{R_n}(\Gamma)=\sup\{\rho(A,B)\mid A,B\in D(\Gamma)\}, \tag{9.3.17}$$

称 $\operatorname{div}_{R_n}(\Gamma)$ 为 Γ 的**发散度**，称发散度等于 1 的 Γ 为**全发散的**.

再考虑例 9.1.4 和例 9.2.5 在 $\mathscr{L}_n^*$ 中的结果.

例 9.3.4　计算以下各理论 Γ 在 $\mathscr{L}_n^*$ 中的发散度.

(i) $\Gamma=\{p,\neg p\}$.

(ii) $\Gamma=\{p\}$.

(iii) $\Gamma=S=\{p_1,p_2,\cdots\}$.

解　(i) 在系统 $\mathscr{L}_n^*$ 中仍有 $\vdash p\to(\neg p\to\bar{0})$ 成立，即 $\bar{0}\in D(\{p,\neg p\})$，所以 $\operatorname{div}_{R_n}(\{p,\neg p\})=1$.

(ii) 易证 $p\vdash p^2$(习题 8.5,4)，所以 $p^2\in D(\{p\})$. 又，设 $A\in D(\{p\})$，则由广义演绎定理得 $\vdash p^2\to A$，从而 $\tau_{R_n}(A)\geqslant\tau_{R_n}(p^2)$. 即，$\tau_{R_n}(p^2)$ 是 $D(\{p^2\})$ 中公式真度的最小值. 可以证明 $\{p^2\}$ 的发散度就是 $D(\{p^2\})$ 中定理与 p^2 间的距离，即 $1-\tau_{R_n}(p^2)$. 由例 9.3.3 得

$$\operatorname{div}_{R_n}(p^2)=\begin{cases}\dfrac{5n+1}{8n}, & n\ \text{为奇数},\\[2mm] \dfrac{5n-6}{8(n-1)}, & n\ \text{为偶数}.\end{cases}$$

(iii) 与 Ł_n 中的情形类似，请读者证明 $\operatorname{div}_{R_n}(S)=1$，即，$S$ 在系统 $\mathscr{L}_n^*$ 中也是全发散的.

可以像在二值命题逻辑系统 **L** 与 n 值 Łukasiewicz 系统 Ł_n 中一样引入理论 Γ 的极指标 $i(\Gamma)$ 和 η- 相容度概念，并证明下面的

命题 9.3.8　在系统 $\mathscr{L}_n^*$ 中，设 Γ 是 $F(S)$ 中的理论，用 $\eta_{R_n}(\Gamma)$ 表示 Γ 的 η- 相容度，则

(i) Γ 是完全相容的，即，Γ 全由定理组成，当且仅当 $\eta_{R_n}(\Gamma)=1$.

(ii) Γ 是相容的当且仅当 $\frac{1}{2} \leqslant \eta_{R_n}(\Gamma) \leqslant 1$.

Γ 相容且全发散当且仅当 $\eta_{R_n}(\Gamma) = \frac{1}{2}$.

(iii) Γ 是不相容的当且仅当 $\eta_{R_n}(\Gamma) = 0$.

这里

$$\eta_{R_n}(\Gamma) = 1 - \frac{1}{2}\mathrm{div}_{R_n}(\Gamma)(1 + i(\Gamma)), \tag{9.3.18}$$

$$i(\Gamma) = 1 - \min\{\lceil 1 - \rho(A,B) \rceil \mid A, B \in D(\Gamma)\}. \tag{9.3.19}$$

且符号⌈⌉由式(9.1.20)定义.

在注 9.2.2 中我们曾指出,由于演绎定理不成立,不易将系统 **L** 中的 δ- 相容度概念推广到系统 **Ł$_n$** 中. 但关于系统 $\mathscr{L}_n^*$ 而言,由于有广义演绎定理成立,容易引入并讨论理论的 δ- 相容度概念.

定义 9.3.5 在系统 $\mathscr{L}_n^*$ 中,设 $\Gamma = \{A_1, \cdots, A_m\} \subset F(S)$. 令

$$\delta_{R_n}(\Gamma) = 1 - \tau_{R_n}(A_1^2 \otimes \cdots \otimes A_m^2 \to \bar{0}). \tag{9.3.20}$$

称 $\delta_{R_n}(\Gamma)$ 为理论 Γ 的 **δ- 相容度**.

由广义演绎定理知,式(9.3.20)中 $A_1^2 \otimes \cdots \otimes A_m^2 \to \bar{0}$ 的真度正是 $\{A_1, \cdots, A_m\} \vdash \bar{0}$ 成立的真度,这个真度越大就表明从 Γ 推出矛盾式的真度越大,即,$\tau_{R_n}(A_1^2 \otimes \cdots \otimes A_m^2 \to \bar{0})$ 标志着 Γ 的不相容度,所以定义 9.3.5 是合理的.

命题 9.3.9 在系统 $\mathscr{L}_n^*$ 中,设 $\Gamma = \{A_1, \cdots, A_m\}$ 是有限理论,则

$$\delta_{R_n}(\Gamma) = 1 - \mathrm{div}_{R_n}(\Gamma) = \tau_{R_n}(A_1^2 \otimes \cdots \otimes A_m^2). \tag{9.3.21}$$

证明 由广义演绎定理容易证明 $A_1^2 \otimes \cdots \otimes A_m^2$ 是 $D(\Gamma)$ 中真度最小的公式,所以 Γ 的发散度等于 $1 - \tau_{R_n}(A_1^2 \otimes \cdots \otimes A_m^2)$. 由命题 9.3.2(ii) 得

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}_{R_n}(\Gamma) &= 1 - \tau_{R_n}(A_1^2 \otimes \cdots \otimes A_m^2) \\
&= \tau_{R_n}(\neg(A_1^2 \otimes \cdots \otimes A_m^2)) \\
&= \tau_{R_n}(A_1^2 \otimes \cdots \otimes A_m^2 \to \bar{0}) \\
&= 1 - \delta_{R_n}(\Gamma),
\end{aligned}$$

所以式(9.3.21)成立.

由此命题和式(9.3.18)知对于有限理论 Γ 而言,它的两种相容度之间的关系如下:

命题 9.3.10 在系统 $\mathscr{L}_n^*$ 中,设 Γ 是有限理论,则

$$\eta_{R_n}(\Gamma) = 1 - \frac{1}{2}(1 - \delta_{R_n}(\Gamma))(1 + i(\Gamma)). \tag{9.3.22}$$

特别是当 Γ 为 η- 相容理论时有

$$\eta_{R_n}(\Gamma) = \frac{1}{2}(1 + \delta_{R_n}(\Gamma)), \text{即 } \delta_{R_n}(\Gamma) = 2\eta_{R_n}(\Gamma) - 1, \tag{9.3.23}$$

而当 Γ 为 η- 完全相容理论时有 $\eta_{R_n}(\Gamma)=\delta_{R_n}(\Gamma)=1$.

注 9.3.1　(i) 对于有限理论 Γ,自然也可以用式(9.3.21) 作为 Γ 的 δ- 相容度的定义,但式(9.3.21) 不能用来引入无限理论 Γ 的 δ- 相容度,比如,取 $\Gamma=S$,则 $\mathrm{div}_{R_n}(S)=1$,从而 S 的"δ- 相容度"将等于 0,这与 S 的相容性相矛盾.

(ii) 对于有限理论 Γ 而言,命题 9.1.11 中的断言仍然是正确的.事实上,若 Γ 不相容,则 $\bar{0}\in D(\Gamma)$,任取定理 $T\in D(\Gamma)$,则 $\rho(T,\bar{0})=1$,从而由式(9.1.21) 得 $i(\Gamma)=1$.若 Γ 相容,则 $\bar{0}\notin D(\Gamma)$,这时由命题 9.3.6(ii) 知对 $D(\Gamma)$ 中任二公式 A 与 B 均有 $\rho(A,B)<1$,从而由式(9.1.20) 和式(9.1.21) 得 $i(\Gamma)=0$.

(iii) 由于对 $\Gamma=\{A_1,\cdots,A_m\}$ 而言,$A_1^2\otimes\cdots\otimes A_m^2$ 是 $D(\Gamma)$ 中"最小的公式",即,对每个 $A\in D(\Gamma)$ 均有 $\vdash A_1^2\otimes\cdots\otimes A_m^2\to A$,所以 $A_1^2\otimes\cdots\otimes A_m^2$ 就是参考文献[19] 的第 8 章中所说的 Γ 的根.可见命题 9.3.9 也可表述为:设 Γ 是 $\mathscr{L}_n^*$ 中的有限理论,则 Γ 的 δ- 相容度等于 Γ 的根的真度.

例 9.3.5　在系统 $\mathscr{L}_5^*$ 中,求 $\Gamma=\{p\vee q\}$ 的 δ- 相容度和 η- 相容度.

解　首先注意,在 R_0 - 单位区间中

$$x^2=\begin{cases}x, & x>\dfrac{1}{2},\\[2mm] 0, & x\leqslant\dfrac{1}{2}.\end{cases}\tag{9.3.24}$$

易证 $(p\vee q)^2$ 是 $D(\Gamma)$ 中真度最小的公式.由命题 8.5.2 中的性质(P22) 知 $\overline{(p\vee q)^2}(x,y))=x^2\vee y^2$.令 $x^2\vee y^2=1$ 得 $x=1$ 且 $y=1,\dfrac{3}{4},\dfrac{2}{4},\dfrac{1}{4},0$ 或 $y=1$ 且 $x=\dfrac{3}{4},\dfrac{2}{4},\dfrac{1}{4},0$,共有 9 组解.再令 $x^2\vee y^2=\dfrac{3}{4}$,由式(9.3.24) 知共有 7 组解.但 $0<x^2\vee y^2\leqslant\dfrac{1}{2}$ 无解,所以由式(9.3.5) 得 $\delta_{R_5}(\{p\vee q\})=\tau_{R_5}((p\vee q)^2)=\dfrac{1}{25}\left(9+\dfrac{3}{4}\times 7\right)=\dfrac{57}{100}$. $\eta_{R_5}(\{p\vee q\})=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{57}{100}\right)=\dfrac{157}{200}$.

既然在系统 $\mathscr{L}_n^*$ 的公式集 $F(S)$ 上引入了伪距离,也有了理论 Γ 的发散度的概念,就可以像在系统 **L** 和 **Ł$_n$** 中一样在系统 $\mathscr{L}_n^*$ 中研究近似推理问题.我们把这一问题留给读者去解决.

9.3.4　系统 $\mathscr{L}^*$ 中的计量化逻辑理论

在 9.2.6 小节中我们曾经问:当 n 充分大时,系统 **Ł$_n$** 与 **Łuk** 有何关系?现在自然也会问:当 n 充分大时,系统 $\mathscr{L}_n^*$ 与 $\mathscr{L}^*$ 有何关系?像在 9.2.6 小节中一样,我们也有一个反映系统 $\mathscr{L}_n^*$ 与 $\mathscr{L}^*$ 之间关系的极限定理.

定义 9.3.6　设公式 $A(p_1,\cdots,p_m)$ 含有 m 个原子公式 $p_1,\cdots,p_m$.令

$$\tau_{R_\infty}(A) = \underbrace{\int_0^1 \cdots \int_0^1}_{m个} \overline{A}_\infty(x_1,\cdots,x_m)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_m, \qquad (9.3.25)$$

称 $\tau_{R_\infty}(A)$ 为 A 的**积分真度**[①]，这里 $\overline{A}_\infty:[0,1]^m \to [0,1]$ 是 A 所诱导的函数.

注意，式(9.3.25)中的 $\overline{A}_\infty$ 与式(9.2.58)中的 $\overline{A}_\infty$ 的结构不同，因为其中涉及的蕴涵运算不同.

前面曾经指出，R_0-型蕴涵算子 $\to:[0,1]^2 \to [0,1]$ 在正方形 $[0,1]^2$ 的主对角线 $x = y$ 上除了 $(1,1)$ 一点外在其余各点均不连续. 所以 $\overline{A}_\infty:[0,1]^m \to [0,1]$ 在 $[0,1]^m$ 上不连续. 但对于 $[0,1]^2$ 而言，其对角线的测度等于零，因此可以用 $[0,1]^2$ 测度任意小的开集所包含. 因为 $\overline{A}_\infty:[0,1]^m \to [0,1]$ 只含有有限多个蕴涵算子，所以对任意给定的正数 ε，$[0,1]^m$ 中存在包含了 $\overline{A}_\infty$ 的所有不连续点且测度小于 ε 的开集 G. 令 $H = [0,1]^m - G$，则 H 是 $[0,1]^m$ 的紧致子集，所以 $\overline{A}_\infty$ 在 H 上一致连续.

在命题 9.2.12 的证明中，曾涉及集合 L_n^m（即，集合 R_n^m）中的格点 $\left(\frac{n}{n-1}\alpha_1,\cdots,\frac{n}{n-1}\alpha_m\right)$，并指出式(9.2.60)成立. 现在的情形仍然相同，只是这些格点中有多少落入了 $[0,1]^m$ 的子集 H 中取决于开集 G 的选取. 上面已经说过，对于 2 维方体 $[0,1]^2$ 而言，算子 $\to$ 的不连续点之集是 1 维的线段，不难证明对于 m 维方体 $[0,1]^m$ 而言，$\overline{A}_\infty(x_1,\cdots,x_m)$ 的不连续点之集至多是 $[0,1]^m$ 中有限多个不高于 $m-1$ 维的方体（或其一部分）之并，所以其测度等于零. 这时可在 $[0,1]^m$ 中选取开集 G，不但使 G 的测度可以小于任意指定的正数，而且可以使当 n 足够大时与 G 相交的小方体(cube)之并的测度也任意小. 所以可按命题 9.2.12 的证明方法证明下面的

命题 9.3.11（极限定理） 设 $A(p_1,\cdots,p_m) \in F(S)$，则

$$\lim_{n\to\infty}\tau_{R_n}(A) = \tau_{R_\infty}(A). \qquad (9.3.26)$$

有了上述的极限定理，系统 $\mathscr{L}_n^*$ 中的许多性质就可以方便地转移到系统 $\mathscr{L}^*$ 之中，请读者验证下面的

命题 9.3.12 在系统 $\mathscr{L}^*$ 中，设 $A,B,C \in F(S)$，$\alpha,\beta \in [0,1]$.

(i) 若 $A \approx B(A \sim B)$，则 $\tau_{R_\infty}(A) = \tau_{R_\infty}(B)$.

(ii) $\tau_{R_\infty}(A \vee B) + \tau_{R_\infty}(A \wedge B) = \tau_{R_\infty}(A) + \tau_{R_\infty}(B)$.

(iii) $\tau_{R_\infty}(\neg A) = 1 - \tau_{R_\infty}(A)$.

(iv) 若 $\tau_{R_\infty}(A) \geqslant \alpha$，$\tau_{R_\infty}(A,B) \geqslant \beta$，则 $\tau_{R_\infty}(B) \geqslant \alpha+\beta-1$.

(v) 若 $\tau_{R_\infty}(A \to B) \geqslant \alpha$，$\tau_{R_\infty}(B \to C) \geqslant \beta$，则 $\tau_{R_\infty}(A \to C) \geqslant \alpha+\beta-1$.

(vi) 若 $\vdash A \to B$，则 $\tau_{R_\infty}(A) \leqslant \tau_{R_\infty}(B)$.

---

① Guo-Jun Wang, Yee Leung. Integrated semantics and logic metric spaces. Fuzzy Sets and Systems, 2003(136):71 ~ 91.

(vii) $\xi_{R_\infty}(A,B)+\xi_{R_\infty}(B,C)\leqslant\xi_{R_\infty}(A,C)+1$,

这里 $\xi_{R_\infty}(A,B)=\tau_{R_\infty}((A\to B)\wedge(B\to A))$.

但请读者注意两个系统 **Łuk** 与 $\mathscr{L}^*$ 的如下不同:在 **Łuk** 中从 $\overline{A}_\infty(x_1,\cdots,x_m)$ 在 $[0,1]^m$ 上的积分等于 1 可推出 $\overline{A}_\infty$ 在 $[0,1]^m$ 上恒等于 1,但在 $\mathscr{L}^*$ 中却只能推出 $\overline{A}_\infty$ 在 $[0,1]^m$ 上几乎处处等于 1,因为这时 $\overline{A}_\infty(x_1,\cdots,x_m)$ 在 $[0,1]^m$ 上只是几乎处处连续的. 所以我们只能得出以下性质:

命题 9.3.13 在系统 $\mathscr{L}^*$ 中,设 $A,B\in F(S)$,A,B 均含有 m 个原子公式 $p_1,\cdots,p_m$.

(i) 若 $A\approx B$,则 $\xi_{R_\infty}(A,B)=1$. 反过来,设 $\xi_{R_\infty}(A,B)=1$,则 $\overline{A}_\infty(x_1,\cdots,x_m)=\overline{B}_\infty(x_1,\cdots,x_m)$ 在 $[0,1]^m$ 上几乎处处成立.

(ii) 若 $\xi_{R_\infty}(A,B)=0$,则 A 与 B 之一为**几乎重言式**,另一为**几乎矛盾式**[①]

(iii) 若 $A\approx B$,则 $\rho_\infty(A,B)=0$. 反过来,若 $\rho_\infty(A,B)=0$,则 $\overline{A}_\infty(x_1,\cdots,x_m)=\overline{B}_\infty(x_1,\cdots,x_m)$ 在 $[0,1]^m$ 上几乎处处成立.

(iv) 若 $\rho_\infty(A,B)=1$,则 A 与 B 之一为几乎重言式,另一为几乎矛盾式.

(v) $\rho_\infty(A,\overline{0})=\tau_{R_\infty}(A)$.

以上

$$\rho_\infty(A,B)=1-\xi_{R_\infty}(A,B),\quad A,B\in F(S).\tag{9.3.27}$$

注 9.3.2 本章中的内容大部分已经发表[②~⑥]. 一个明显的不同是,注②~⑥中基于可数多个均匀概率测度空间的无穷乘积而在全体赋值集 Ω 上引入了测度,然后引入逻辑公式的真度概念. 而本章则回避了 Ω 上的测度概念,采用比较直观的方法定义了逻辑公式的真度以及随之而来的相似度、伪距离、发散度、相容度以及近似推理等. 当然,回避了 Ω 上的测度会不便于解释几乎重言式与几乎矛盾式等概念了(见命题 9.3.13(ii)),但这时可以采用变通的方法去解释,比如,公式 $A(p_1,\cdots,p_m)$ 是几乎重言式指 A 所诱导的函数 $\overline{A}$ 在 $[0,1]^m$ 上几乎处处等于 1.

习 题 9.3

1. 在系统 $\mathscr{L}_6^*$ 和 $\mathscr{L}^*$ 中求公式,$p,p\to q,p\wedge q$ 的真度.

---

① Guo-Jun Wang. Comparison between deduction theorems in diverse logic systems. New Mathematics & Natural Computation, 1(2005),1:65 ~ 77.

② 王国俊,傅丽,宋建社. 二值命题逻辑中命题的真度理论,中国科学,A 辑,31(2001),11,998 ~ 1008.

③ Guo-Jun Wang, Wen-Xiu Zhang. Consistency degrees of finite theories in Łukasiewicz propositional fuzzy logic. Fuzzy sets and systems 149(2005)275 ~ 284.

④ 王国俊,李壁镜. Łukasiewicz n 值命题逻辑系统中公式的真度理论和极限定理. 中国科学,E 辑,35(2005),6,561 ~ 569.

⑤ Xiang-Nan Zhou, Guo-Jun Wang. Consistency degrees of theories in some systems of propositional fuzzy logic. Fuzzy Sets and Systems 152(2005)321 ~ 331.

⑥ Guo-Jun Wang, Yee Leung. Integrated semantics and logic metric spaces. Fuzzy Sets and Systems, 136(2003) 71 ~ 91.

2. 在系统 $\mathscr{L}_5^*$ 中，求公式 A 与 B 之间的相似度与伪距离，设：

(i) $A = p, B = q$.

(ii) $A = p, B = \neg p$.

(iii) $A = p \vee q, B = p \wedge q$.

(iv) $A = p \otimes q, B = p \oplus q$.

3. 在系统 $\mathscr{L}_n^*$ 中证明

$\tau_{R_n}(A \otimes B) \leqslant \tau_{R_n}(A \wedge B) \leqslant \tau_{R_n}(A \vee B) \leqslant \tau_{R_n}(A \oplus B), A, B \in F(S)$.

4. 在系统 $\mathscr{L}_4^*$ 中，求 $\Gamma = \{p_1, p_2\}$ 的根的真度(参看注 9.3.1(iii)). 再在系统 $\mathscr{L}^*$ 中解答这一问题.

5. 在系统 $\mathscr{L}_5^*$ 中，求 $\Gamma = \{p, q, r\}$ 的发散度.

6. 求 $\Gamma = \{p, p \to q\}$ 在系统 $\mathscr{L}_6^*$ 中的 η- 相容度与 δ- 相容度.

7. 设 $\varepsilon > 0$，试证在系统 $\mathscr{L}_n^*$ 中，存在 δ- 相容度小于 ε 的相容理论.

8. 在系统 $\mathscr{L}_n^*$ 中，是否存在 η- 相容度等于 $\frac{1}{2}$ 的有限相容理论？为什么？

9.4　关于 Gödel 系统与乘积系统的评注

如命题 8.2.2 所指出的，Gödel 的蕴涵算子 R_G 和乘积蕴涵算子 R_π 都是正则蕴涵算子，其表达式分别如下：

$$R_G(a,b) = \begin{cases} 1, & a \leqslant b, \\ b, & a > b. \end{cases} \tag{9.4.1}$$

$$R_\pi(a,b) = \begin{cases} 1, & a = 0, \\ \dfrac{b}{a} \wedge 1, & a > 0. \end{cases} \tag{9.4.2}$$

和它们相伴随的三角模分别为由下式定义的 $\otimes_G$ 与 $\otimes_\pi$：

$$a \otimes_G b = a \wedge b, \quad a \otimes_\pi b = a \cdot b. \tag{9.4.3}$$

在 Gödel 系统和乘积系统所对应的单位区间[0,1]中非运算 $\neg$ 的定义如下：

$$\neg a = a \to 0. \tag{9.4.4}$$

这里 $\to$ 为 R_G 或 R_π，这时由式(9.4.1)和式(9.4.2)都推出

$$\neg a = \begin{cases} 1, & a = 0, \\ 0, & a > 0. \end{cases} \tag{9.4.5}$$

在 Łukasiewicz 系统与系统 $\mathscr{L}_n^*$ 或 $\mathscr{L}^*$ 中，仍用式(9.4.4)在相应的 MV- 单位区间与 R_0- 单位区中定义非运算，则得

$$a \to 0 = 1 - a. \tag{9.4.6}$$

这里 $\to$ 为 R_L 或 R_0.

式(9.4.5)与式(9.4.6)有很大的不同，粗略地说，由式(9.4.5)所给出的非运算实在是太强了，因为在[0,1]中，除了 0 而外，(0,1]中的数都被非运算作用为 0

了. 下面将看到,当 n 较大时系统 $\mathbf{G}_n$ 与 $\mathbf{\Pi}_n$ 的性质很不理想,特别是 Gödel 系统与乘积系统不宜于用来表述 Fuzzy 逻辑.

事实上,以 Gödel 系统 $\mathbf{G}_n$ 为例. 其优点之一是演绎定理成立,即,设 $\Gamma \subset F(S)$, $A, B \in F(S)$,

$$\text{若 } \Gamma \cup \{A\} \vdash B, \text{则 } \Gamma \vdash A \to B. \tag{9.4.7}$$

现在令 $\Gamma = \varnothing, A = \neg p, p$ 是原子公式,令 $B = \overline{0}$,则由式(9.4.5) 得

$$\overline{\neg p \to \overline{0}}(x) = \neg x \to 0 = (x \to 0) \to 0 = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

$$x \in \{0, \frac{1}{n-1}, \cdots, \frac{n-2}{n-1}, 1\}. \tag{9.4.8}$$

这时由真度的计算公式(9.2.3) 或式(9.3.5) 都得出

$$\tau_{G_n}(\neg p \to \overline{0}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{n-1}\left|\overline{\neg p \to \overline{0}}^{-1}(\frac{i}{n-1})\right| = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}. \tag{9.4.9}$$

由式(9.4.7) 知这表明从 $\neg p$ 推出矛盾式这一事实的真度等于 $1 - \frac{1}{n}$. 若 $n = 10$,则在 90% 的程度上从 $\neg p$ 可推出矛盾式!那么只要 Γ 含有一个原子公式的否定式,就更可以在很大程度上推出矛盾式. 特别是如果采用 Gödel 系统建立 Fuzzy 逻辑,则可看出 $\neg p \to \overline{0}$ 的积分真度等于 1,那么只要含有一个原子公式的否定式的理论 Γ 就都是“几乎不相容”的了. 对于乘积系统也有同样的情况. 正是在这种意义上,我们得出结论:Gödel 系统与乘积系统是不宜于用来建立 Fuzzy 逻辑的.

参考文献

[1] Hamilton A G . Logic For Mathematicians. Cambridge University Press, 1978

[2] 王世强. 模型论基础. 北京:科学出版社,1987

[3] 王元元. 计算机科学中的逻辑学. 北京:科学出版社, 1989

[4] Kleene S C . Introduction To Metamathematics. Van Nostrand
莫绍揆译. 元数学导论. 北京:科学出版社, 1984

[5] 王宪钧. 数理逻辑引论. 北京:北京大学出版社,1982

[6] 胡世华,陆钟万. 北京:数理逻辑基础. 科学出版社,1983

[7] 沈复兴. 模型论导引. 北京:北京师范大学出版社,1995

[8] D Van Dalen. Logic and Structure. Springer-Verlag, 1983

[9] Chang C C, Keisler H J. Model theory. North-Holland, 1973

[10] Rasiowa H, Sikorski R. The Mathematics of Metamathematics. Polska Akademia Nauk, 1963

[11] Cignoli R, IM L. D'Ottaviano, D. Mundici. Algebraic Foundation of Many-Valued Reasoning. Kluwer Academic Publishers, 2000

[12] Chang C L, RC-T. Lee. Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving. Academic Press, 1973

[13] 石纯一,黄昌宁,王家厥. 人工智能原理. 北京:清华大学出版社,1993

[14] 王永庆. 人工智能. 西安:西安交通大学出版社,1994

[15] 刘叙华. 基于归结方法的自动推理. 北京:科学出版社,1994

[16] 张文修,梁怡. 不确定性推理原理. 西安:西安交通大学出版社,1996

[17] 王国俊. L-fuzzy 拓扑空间论. 西安:陕西师范大学出版社,1988

[18] 郑崇友,樊磊,崔宏斌. Frame 与连续格. 北京:首都师范大学出版社, 2000

[19] 王国俊. 非经典数理逻辑与近似推理. 北京:科学出版社,2000

[20] Lloyd J W. Foundations of Logic Programming. Springer-Verlag, 1987

[21] Kline M. Mathematical Thought From Ancient To Modern Times
张理京,张锦炎,北京大学数学系数学史翻译组译. 古今数学思想. 上海:上海科学技术出版社,1981

[22] 陆钟万. 面向计算机科学的数理逻辑. 北京:科学出版社,1998

[23] Schumann J M. Automated Theorem Proving in Software Engineering. Springer-Verlag, New York, 2001

[24] Kalman I A . Automated Reasoning with OTTER. Rinton Press, 2001

[25] Bundy A. Lecture Notes in Artificial Intelligence, Springer-Verlag, 1994,814

[26] Hájek P. Metamathematics of Fuzzy Logic. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998

[27] Novák V, Perfilieva I, Močkoř. Mathematical Principles of Fuzzy Logic. Kluwer Academic Publishers, Boston, 1999

索 引

A

α-重言式 8.4(习题 8.6);8.6.1
A 的模型 2.2.6
A 的 Skolem 标准型 5.2.3
A 的子句集 5.3
A 生成的 MP 滤子 8.5.2
A 在$[0,1]^m$上诱导的阶梯函数 9.2.2
A 中的赋值 8.5.3

B

半解释 5.5.1
伴随对 8.2
保归结扩张 7.2
被消去文字 6.3.1
闭公式 3.2.3
变元代换定理 4.2.2
表达式 6.2.1
Boole 代数 1.3.1
Boole 代数的表示定理 1.3.3
Boole 代数的完备性定理 1.3.3
Boole 等式 1.3.3
不含变元的 OL 归结的完备性证明 7.4
不含变元的子句集 7.4
不可满足的 3.2.3
不相容 2.3.10
不一致集 6.2.2
补运算 1.3.1

C

重言式 2.2.2;3.2.3;8.4.1;8.6.1
Σ-(α-重言式) 8.6.1
Σ-重言式 8.6.1
C_1 关于 C_2 有序二元归结式 7.4
超归结式 7.2
程度化 第 9 章前言
乘积 1.2.2
乘积 R_0 代数 8.5.3
重言式删去规则 5.6
纯文字规则 5.6
从 Γ 到 A 的推演 4.1.1
从 S 到 C 的归结推理 6.1

D

代换实例 3.2.3
代入定理 2.2.5;2.3.6
单位因子 6.3.1
单文字规则 5.6
单子句 5.3
De Morgan 对偶律 2.2.5
等价代换定理 8.6.2
δ-相容度 9.1.5;9.3.3
第二无限分配律 1.2.3
第一无限分配律 1.2.3
点式序 1.2.2
典型同态 2.3.7
典型映射 2.3.7;8.6.3
电子 7.2
顶点子句 7.4
定理 2.3.2;4.1.2;8.4.2
定向集 1.1.4
定向子集 1.1.4

E

二叉语义树 5.5.2
二元归结式 6.3.1

二元锁归结式　7.3
二值逻辑　8.1

F

$\bar{\mathrm{F}}$ 的型　5.4
发散度　9.1.4;9.2.4;9.3.3
非空子句　6.1
分离规则　5.6
分配格　1.2.2
分支　5.5.2
父辈子句　6.3.1
复合命题　2.1.1
复合置换　6.2.1
赋值　2.2.1;8.4.1;8.6.1
赋值定理　5.4
Fuzzy 逻辑　8.1

G

Γ-结论　2.3.2
Γ-推出 A_n　2.3.2
Γ-推论　4.1.1
格　1.2.1
格同构　1.2.4
格同态　1.2.4
公式　2.2.1;3.1.1;8.6.1
公式 A 导出的 Boole 代数　2.2.3
公式代换定理　4.2.2
关于 $\bar{F}$ 的正则域　5.4
关于 (F_0, F) 的 Herbrand 域　5.5.1
关于 I 的假公式　3.2.3
关于 I 的真公式　3.2.3
广义演绎定理　8.6.4
归结式　6.1;6.3.1
归结推理　6.3.2
归结原理的完备性定理　6.4.2

H

H 的第 k 级元　5.5.1
H-解释　5.5.1
核　7.2
合并　7.3
合取范式　2.2.4
合式公式　2.2.1;3.1.1
合一化子　6.2.2
合一置换　6.2.2
Herbrand 定理 I　5.5.2
Herbrand 定理 II　5.5.2
Herbrand 基　5.5.2
Herbrand 系统　5.5.1
HS 规则　4.1.3
互补　6.1
互补对　5.5.2

I

i-等价　3.2.2
I-型误差小于 ε 的结论　9.1.6
II-型误差小于 ε 的结论　9.1.6
III-型误差小于 ε 的结论　9.1.6

J

极大滤子　1.2(习题 1.2)
积分真度　9.2.6;9.3.4
几乎重言式　9.3.4
几乎矛盾式　9.3.4
基例　5.5.2
极限定理　9.2.6;9.3.4
基项　6.2.1
基原子　5.5.2
极指标　9.1.5
基置换　6.2.1
简单合取式　2.2.4
简单命题　2.1.1
简单析取式　2.2.4
解释 I　3.2.1
解释 I 满足 A　3.2.3
紧致性定理　2.2.3

经置换 θ 所得的例　6.2.1

K

K 中的证明　4.1.1
$K_{\mathscr{L}}$ 的完备性定理　4.4.3
可达 Σ-(α-重言式)　8.6.1
可合一的　6.2.2
可靠性定理　2.3.4;4.1.2;8.4.2;8.6.3
可满足的　3.2.3
可判定性定理　2.3.8
可约简子句　7.4
可证等价　2.3.5;4.2.1;8.4.2;8.6.3
可证等价定理　8.6.2
空置换　6.2.1
空子句　6.1
扩张　2.3.10;4.4.1

L

$\mathscr{L}$ 在 I 中的赋值 v　3.2.2
$\mathscr{L}^*$-Lindenbaum 代数　8.6.2
例　6.2.1
理论　9.1.4
理想　1.2.4
Lindenbaum 代数　2.3.7;8.4.2
滤子　1.2.4
Łuk 的完备性定理　8.4.2
论域　3.2.1
逻辑等价　2.2.2;3.3;8.4.2;8.6.1
逻辑有效　3.2.3

M

M 的模型　2.2.6
M 语义蕴涵 A　2.2.6
矛盾式　2.2.2;3.2.3;8.4.1;8.6.1
mgu 算法　6.2.3
mgu 算法的合理性定理　6.2.3
幂集 Boole 代数　1.3.1
命题　2.2.1;8.6.1
命题变元　2.1,2;2.2.1
命题演算中的归结原理　6.1
命题演算中的归结原理的完备性定理　6.1
模型　2.2.6;3.2.3
MP 滤子　8.5.2
母式　5.2.3
MV 代数　8.3.1
MV 单位区间　8.3.3
MV 等式　8.3.3
MV 方体　8.3(习题 8.3)

N

n-级归结推论　6.3.2
n 元关系　1.1.1

O

OL 归结　7.4
OL 证明　7.4

P

PI 冲撞　7.2
PI 归结　7.2
PI 归结的完备性定理　7.2
PI 归结式　7.2
PI 推理　7.2
PI 证明　7.2
偏序集　1.1.2

Q

前束范式　4.3.2
前束范式定理　4.3.2
全发散　9.1.4;9.2.4;9.3.3
全序集　1.1.2

R

R_0 代数　8.5.1

R_0 代数的完备性定理　8.5.2
R_0 单位区间　8.5.1
R_0 等式　8.5.2
R_0 等式在 R_0 代数 M 中成立　8.5.2

S

s-模　8.2
S 的归结证明　6.3.2
S 的 H-解释　5.5.1
S 的 Herbrand 系统　5.5.1
S 的 Herbrand 域　5.5.1
S 的证明　6.1;6.3.2
S 中的边子句　7.4
三段论规则　2.3.3
三角模　8.2
三角余模　8.2
商 Boole 代数　1.3.2
商 Boole 代数 $\mathscr{F}/\sim$　4.4
Skolem 变形　5.2.1;5.2.4
上集　1.2.4
上界　1.1.3
上确界　1.1.3
升级算法　8.6.1
失败结点　5.5.2
输入归结　7.4
素理想　1.2.4
素滤子　1.2.4;8.5.2
锁归结　7.3
锁归结的完备性定理　7.3
锁归结式　7.3
锁推理　7.3
锁因子　7.3
锁证明　7.3

T

t 关于 $A(x_i)$ 中的 x_i 是自由的　3.1.2
t-模　8.2
提升引理　6.4.1
同构　1.2.4;8.5.2
同类不归结原则　7.1
同态　1.2.4;8.5.2
同余关系　1.3.2
推广规则　4.1.1
推演长度　2.3.2;4.1.1;8.4.2

V

v 满足 A　3.2.2

W

完备格　1.2.1
完备 Heyting 代数　1.2(习题 1.2)
完备性定理　2.3.8;2.3.9;2.3.10
完全的　2.3.10;4.4.1
完全相容的　9.1.5
伪距离　9.1.3;9.2.3;9.3.2
文字　5.3
无框文字　7.4

X

X 生成的自由 MV 代数　8.3.3
析取范式　2.2.4
系统 $\mathscr{L}^*$ 的完备性定理　8.6.3
下定向集　1.2.4
下集　1.2.4
下界　1.1.3
下确界　1.1.3
辖域　3.1.2
线性推理　7.4
线性推理归结式　7.4
项　3.1.1
项的代入定理　3.2.2
相容的　2.3.10;4.1.2
相容的一阶系统　4.4.1
相容度　9.1.5
相似度　9.1.2;9.3.2
形式系统　2.3.1

形式系统 $\mathscr{L}^*$ 8.6.2

Y

η_Γ相容度 9.1.5
η_Γ元 4.5.1
演绎定理 2.3.3;4.1.3
一般的 De Morgan 对偶律 2.2.5
一阶系统 $K_{\mathscr{L}}$ 4.1.1
一阶语言 3.1.1
一阶语言 $\mathscr{L}$ 3.1.1
因子 6.3.1
有界格 1.2.4
有框文字 7.4
有框子句 7.4
有限封闭语义树 5.5.2
有序二元归结式 7.4
有序归结式 7.4
有序线性归结 7.4
有序因子 7.4
与⊗相伴随的蕴涵算子 8.2
预序 1.1.1
预序集 1.1.1
语义冲撞 7.2
语义理论 2.2.1
语义 MP 规则 2.2.2
原子公式 2.2.1;3.1.1;8.6.1
原子句 7.4
原子命题 2.1,2;2.2.1;8.6.1
约简 7.4
约束变元 3.1.2

Z

在 MV 代数 A 中成立 8.3.3
在 MV 单位区间[0,1]中的赋值 8.4.1
在 R_0 单位区间[0,1]中的赋值 8.6.1
真度 9.1.1
真理想 1.2.4
真滤子 1.2.4
证明 2.3.2
证明的长度 2.3.2;4.1.1
正则函数系统 5.4
正则函数系统的存在性定理 5.4
正则蕴涵算子 8.2
支持集归结 7.2
置换 6.2.1
主理想 1.2.4
主滤子 1.2.4
子 Boole 代数 1.3.1
子句 5.3;6.1
自然伪距离 9.1.3;9.2.3;9.3.2
子 R_0 代数 8.5.2
自由变元 3.1.2
自由代数 2.2.1
最小 7.3
最一般合一化子 6.2.2
最一般合一置换 6.2.2
左连续 8.2

《现代数学基础丛书》出版书目

（按出版时间排序）

1　数理逻辑基础（上册）　1981.1　胡世华、陆钟万　著
2　紧黎曼曲面引论　1981.3　伍鸿熙、吕以辇、陈志华　著
3　组合论（上册）　1981.10　柯召、魏万迪　著
4　数理统计引论　1981.11　陈希孺　著
5　多元统计分析引论　1982.6　张尧庭、方开泰　著
6　概率论基础　1982.8　严士健、王隽骧、刘秀芳　著
7　数理逻辑基础（下册）　1982.8　胡世华、陆钟万　著
8　有限群构造（上册）　1982.11　张远达　著
9　有限群构造（下册）　1982.12　张远达　著
10　环与代数　1983.3　刘绍学　著
11　测度论基础　1983.9　朱成熹　著
12　分析概率论　1984.4　胡迪鹤　著
13　巴拿赫空间引论　1984.8　定光桂　著
14　微分方程定性理论　1985.5　张芷芬、丁同仁、黄文灶、董镇喜　著
15　傅里叶积分算子理论及其应用　1985.9　仇庆久、陈恕行　编
16　辛几何引论　1986.3　J.柯歇尔、邹异明　著
17　概率论基础和随机过程　1986.6　王寿仁　著
18　算子代数　1986.6　李炳仁　著
19　线性偏微分算子引论（上册）　1986.8　齐民友　著
20　实用微分几何引论　1986.11　苏步青、华宣积、忻云龙　著
21　微分动力系统原理　1987.2　张筑生　著
22　线性代数群表示导论（上册）　1987.2　曹锡华、王建磐　著
23　模型论基础　1987.8　王世强　著
24　递归论　1987.11　莫绍揆　著
25　有限群导引（上册）　1987.12　徐明曜　著
26　组合论（下册）　1987.12　柯召、魏万迪　著
27　拟共形映射及其在黎曼曲面论中的应用　1988.1　李忠　著
28　代数体函数与常微分方程　1988.2　何育赞　著
29　同调代数　1988.2　周伯壎　著
30　近代调和分析方法及其应用　1988.6　韩永生　著
31　带有时滞的动力系统的稳定性　1989.10　秦元勋、刘永清、王联　编著

32 代数拓扑与示性类 1989.11 马德森著 吴英青、段海鲍译
33 非线性发展方程 1989.12 李大潜、陈韵梅 著
34 反应扩散方程引论 1990.2 叶其孝、李正元 著
35 仿微分算子引论 1990.2 陈恕行、仇庆久、李成章 编
36 公理集合论导引 1991.1 张锦文 著
37 解析数论基础 1991.2 潘承洞、潘承彪 著
38 拓扑群引论 1991.3 黎景辉、冯绪宁 著
39 二阶椭圆型方程与椭圆型方程组 1991.4 陈亚浙、吴兰成 著
40 黎曼曲面 1991.4 吕以辇、张学莲 著
41 线性偏微分算子引论(下册) 1992.1 齐民友 著
42 复变函数逼近论 1992.3 沈燮昌 著
43 Banach 代数 1992.11 李炳仁 著
44 随机点过程及其应用 1992.12 邓永录、梁之舜 著
45 丢番图逼近引论 1993.4 朱尧辰、王连祥 著
46 线性微分方程的非线性扰动 1994.2 徐登洲 马如云 著
47 广义哈密顿系统理论及其应用 1994.12 李继彬、赵晓华、刘正荣 著
48 线性整数规划的数学基础 1995.2 马仲蕃 著
49 单复变函数论中的几个论题 1995.8 庄圻泰 著
50 复解析动力系统 1995.10 吕以辇 著
51 组合矩阵论 1996.3 柳柏濂 著
52 Banach 空间中的非线性逼近理论 1997.5 徐士英、李冲、杨文善 著
53 有限典型群子空间轨道生成的格 1997.6 万哲先、霍元极 著
54 实分析导论 1998.2 丁传松、李秉彝、布伦 著
55 对称性分岔理论基础 1998.3 唐云 著
56 Gel'fond-Baker 方法在丢番图方程中的应用 1998.10 乐茂华 著
57 半群的 S-系理论 1999.2 刘仲奎 著
58 有限群导引(下册) 1999.5 徐明曜 著
59 随机模型的密度演化方法 1999.6 史定华 著
60 非线性偏微分复方程 1999.6 闻国椿 著
61 复合算子理论 1999.8 徐宪民 著
62 离散鞅及其应用 1999.9 史及民 编著
63 调和分析及其在偏微分方程中的应用 1999.10 苗长兴 著
64 惯性流形与近似惯性流形 2000.1 戴正德、郭柏灵 著
65 数学规划导论 2000.6 徐增堃 著
66 拓扑空间中的反例 2000.6 汪林、杨富春 编著
67 拓扑空间论 2000.7 高国士 著
68 非经典数理逻辑与近似推理 2000.9 王国俊 著
69 序半群引论 2001.1 谢祥云 著

70 动力系统的定性与分支理论 2001.2 罗定军、张祥、董梅芳 编著
71 随机分析学基础(第二版) 2001.3 黄志远 著
72 非线性动力系统分析引论 2001.9 盛昭瀚、马军海 著
73 高斯过程的样本轨道性质 2001.11 林正炎、陆传荣、张立新 著
74 数组合地图论 2001.11 刘彦佩 著
75 光滑映射的奇点理论 2002.1 李养成 著
76 动力系统的周期解与分支理论 2002.4 韩茂安 著
77 神经动力学模型方法和应用 2002.4 阮炯、顾凡及、蔡志杰 编著
78 同调论——代数拓扑之一 2002.7 沈信耀 著
79 金兹堡-朗道方程 2002.8 郭柏灵、黄海洋、蒋耀容 著
80 排队论基础 2002.10 孙荣恒、李建平 著
81 算子代数上线性映射引论 2002.12 侯晋川、崔建莲 著
82 微分方法中的变分方法 2003.2 陆文端 著
83 周期小波及其应用 2003.3 彭思龙、李登峰、谌秋辉 著
84 集值分析 2003.8 李雷 吴从炘 著
85 数理逻辑引论与归结原理 2003.8 王国俊 著
86 强偏差定理与分析方法 2003.8 刘文 著
87 椭圆与抛物型方程引论 2003.9 伍卓群、尹景学
88 有限典型群子空间轨道生成的格(第二版) 2003.10 万哲先、霍元极 著
89 调和分析及其在偏微分方程中的应用(第二版) 2004.3 苗长兴 著
90 稳定性和单纯性理论 2004.6 史念东 著
91 发展方程数值计算方法 2004.6 黄明游 著
92 传染病动力学的数学建模与研究 2004.8 马知恩 周义仓 王稳地 靳祯 著
93 模李超代数 2004.9 张永正 刘文德 著
94 巴拿赫空间中算子广义逆理论及其应用 2005.1 王玉文 著
95 巴拿赫空间结构和算子理想 2005.3 钟怀杰 著
96 脉冲微分系统引论 2005.3 傅希林、闫宝强、刘衍胜 著
97 代数学中的 Frobenius 结构 2005.7 汪明义 著
98 生存数据统计分析 2005.12 王启华 著
99 数理逻辑引论与归结原理(第二版) 2006.3 王国俊 著